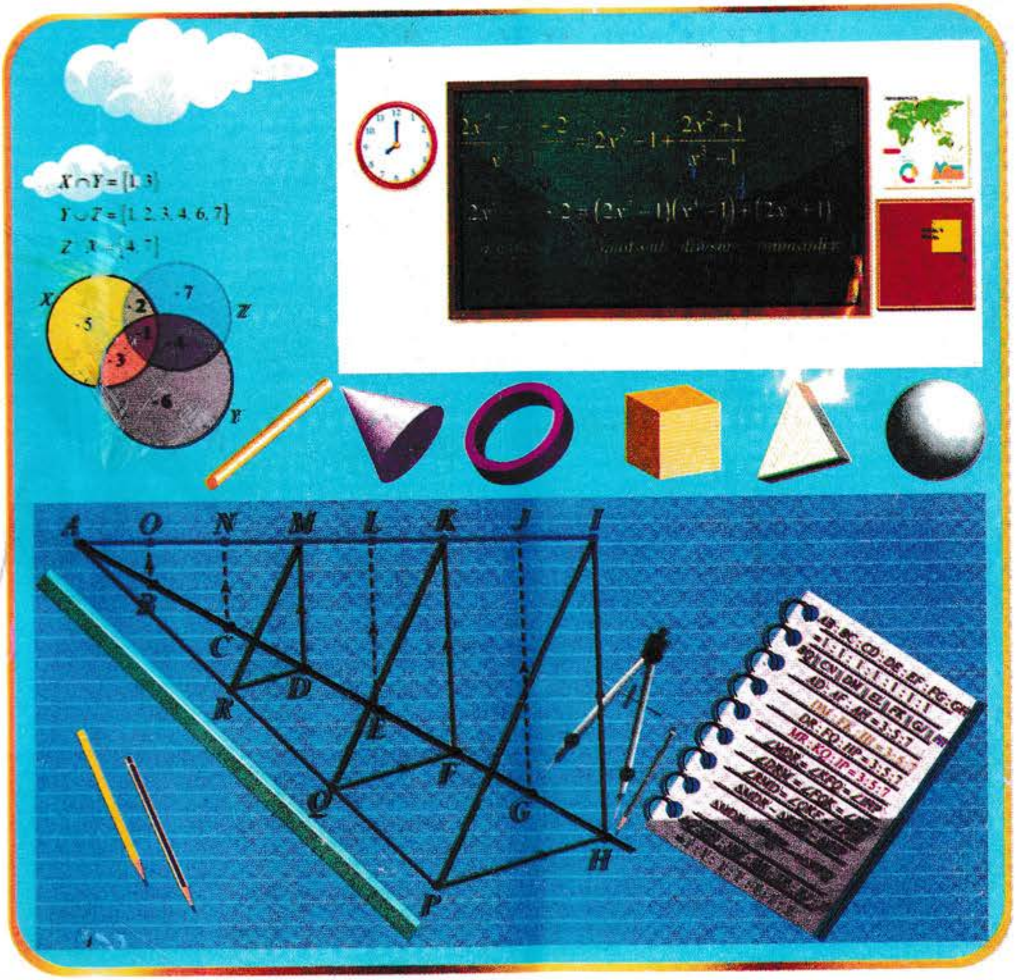
ပြည်ထောင်စုသမ္မတမြန်မာနိုင်ငံတော်အစိုးရ
ပညာရေးဝန်ကြီးဌာန

ကျောင်းသုံးစာအုပ်

သင်္ချာ

နဝမတန်း



နဝမတန်း

သင်္ချာ – ၁

မာတိကာ

သင်္ချာ – ၁

အခန်း ၁ ကိန်းစစ်များ

ကိန်းစနစ်တွင် သဘာဝကိန်းများ၊ ကိန်းပြည့်များနှင့် ရာရှင်နယ်ကိန်းများအကြောင်းကို လေ့လာခဲ့ကြပြီးဖြစ်သည်။ ဤသင်ခန်းစာတွင် ရာရှင်နယ်ကိန်းများအပြင် အီရာရှင်နယ်ကိန်းများ အကြောင်းကို တိုးချဲ့၍ လေ့လာကြမည်။ သိရှိထားပြီးဖြစ်သောကိန်းများအကြောင်းကို အခြေခံ၍ ကိန်းစစ်များအကြောင်းကိုလေ့လာသွားမည်။

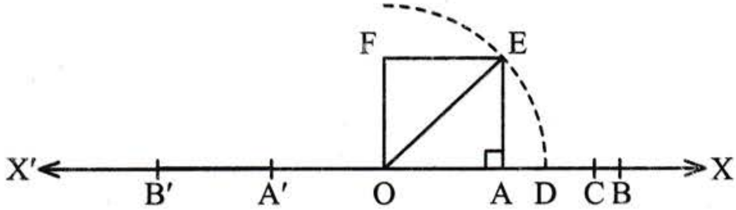
ဤသင်ခန်းစာကို သင်ကြားပြီးပါက အီရာရှင်နယ်ကိန်းများဆိုင်ရာ အခြေခံလုပ်ထုံးများကို နားလည်သဘောပေါက်၍ အီရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခု၏တန်ဖိုးကိုလည်း ခန့်မှန်းတတ်မည်။ ကိန်းစစ်စနစ်၏ဂုဏ်သတ္တိများကိုလည်း အသုံးချနိုင်မည်။

၁.၁ ရာရှင်နယ်ကိန်းများကိုတိုးချဲ့ရန်လိုအပ်ခြင်း

အပိုင်းကိန်းများနှင့် ယင်းတို့၏လက္ခဏာဆန့်ကျင်ဘက်ကိန်းများကို ရာရှင်နယ်ကိန်းများ ဟုခေါ်သည်။ ရာရှင်နယ်ကိန်းများနှင့်ပတ်သက်၍ အောက်ပါအချက်များကို ပြန်လည်လေ့လာထား ရန်လိုအပ်သည်။

- မတူညီသောရာရှင်နယ်ကိန်းနှစ်ခုကြားတွင် ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုကို အမြဲရှာနိုင်သည်။
- ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုကို အဆုံးရှိသော ဒသမကိန်းဖြင့်လည်းကောင်း၊ အဆုံးမရှိသော ပြန်ထပ်ဒသမကိန်းဖြင့်လည်းကောင်း ဖော်ပြနိုင်သည်။

နေ့စဉ်လူနေမှုဘဝတွင် အရာဝတ္ထုပစ္စည်းများကို အညီအမျှ ခွဲဝေရာ၌လည်းကောင်း၊ တိုင်းတာမှုလုပ်ငန်းများဆောင်ရွက်ရာ၌ တိုင်းတာရရှိသည့်အလျားတို့သည် အတိုင်းယူနစ်၏ဆတိုး ကိန်းများမဟုတ်သောအခါတွင်လည်းကောင်း ရာရှင်နယ်ကိန်းများကို အသုံးပြု၍ဖော်ပြလေ့ရှိကြ သည်။ သို့ရာတွင် ဤရာရှင်နယ်ကိန်းတို့သည် တိုင်းတာမှုအမျိုးမျိုးတို့ကိုဖော်ပြရန် ပြည့်စုံလုံလောက် ခြင်းမရှိကြောင်း တွေ့ရှိရပြန်သည်။ ဥပမာအနေဖြင့် အောက်ပါအခြေအနေအား လေ့လာကြည့်ပါ။



ပုံ ၁.၁

ပုံ ၁. ၁ တွင် A, B, C တို့သည် ရာရှင်နယ်ကိန်း $1, 2, \frac{7}{4}$ တို့ကို ကိန်းမျဉ်းပေါ်တွင် ကိုယ်စား ပြုဖော်ပြလျှင် အလျား OA, OB နှင့် OC တို့သည် $1, 2, \frac{7}{4}$ ယူနစ်အသီးသီးဖြစ်သည်ကို သိရှိပြီး

ဖြစ်သည်။ ဆက်လက်၍ OA ကို အနားတစ်ဖက်အဖြစ်ယူ၍ စတုရန်း OAEF ကို တည်ဆောက်ပါ။ O နှင့် E တို့ကိုဆက်ပါ။ ဤတွင် OA = AE = 1 ယူနစ်ဖြစ်မည်။ ΔOAEသည် ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခု ဖြစ်သောကြောင့် ပိုက်သာဂိုရပ်သီအိုရမ်အရ

$$OE^2 = OA^2 + AE^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$OE = \sqrt{2}$$

O ကို ဗဟိုထား၍ OE အချင်းဝက်ဖြင့် စက်ဝန်းပိုင်းတစ်ခုဆွဲရာ OX ကို D ၌ ဖြတ်သည်။ ဤတွင် OD = OE = $\sqrt{2}$ ဖြစ်သည်။ ထိုအခါ ကိန်းမျဉ်းပေါ်တွင် အလျား $\sqrt{2}$ ရှိသော မျဉ်းပိုင်း OD ကိုရသည်။ အဆိုပါအလျား $\sqrt{2}$ သည် ကျွန်ုပ်တို့သိရှိထားပြီးဖြစ်သော ရာရှင်နယ်ကိန်းများတွင် ပါဝင်ခြင်း ရှိ မရှိ ကို ဆက်လက်လေ့လာကြည့်မည်။

အပေါင်းကိန်းတစ်ခု x ကို နှစ်ထပ်ပြုသောအခါ 2 ရသည်ဆိုပါစို့။ $1^2 = 1$ ဖြစ်ပြီး $2^2 = 4$ ဖြစ်သောကြောင့် လိုအပ်သောကိန်း x သည် 1 နှင့် 2 ကြားတွင်ရှိမည်။ 1 နှင့် 2 ကြားရှိ ရာရှင်နယ်ကိန်းအချို့ကို ထပ်မံလေ့လာကြည့်ပါက အောက်ပါအတိုင်းတွေ့ရသည်။

$$(1.1)^2 = 1.21$$
$$(1.2)^2 = 1.44$$
$$(1.3)^2 = 1.69$$
$$(1.4)^2 = 1.96$$
$$(1.5)^2 = 2.25$$
$$(1.6)^2 = 2.56$$
$$(1.7)^2 = 2.89$$
$$(1.8)^2 = 3.24$$
$$(1.9)^2 = 3.61$$

အထက်ပါနှစ်ထပ်ကိန်းများကို လေ့လာကြည့်လျှင် မည်သည့်ကိန်းတစ်ခု၏ နှစ်ထပ်ကိန်းသည် 2 နှင့် မညီကြောင်း တွေ့ရသည်။ ထို့ကြောင့် x သည် ထိုရာရှင်နယ်ကိန်းများမှ မည်သည့်ကိန်းတစ်ခုနှင့်မျှ မတူပေ။ သို့ရာတွင် $(1.4)^2 = 1.96$ သည် 2 အောက်ငယ်၍ $(1.5)^2 = 2.25$ သည် 2 ထက်ကြီးသောကြောင့် x သည် 1.4 ထက်ကြီးပြီး 1.5 အောက်ငယ်သည်ဟု ကောက်ချက်ချနိုင်သည်။ တစ်ဖန် 1.4 နှင့် 1.5 ကြားရှိ ရာရှင်နယ်ကိန်းများကို အထက်ပါနည်းအတိုင်း လေ့လာကြည့်ပါက x သည် 1.41 ထက်ကြီးပြီး 1.42 အောက် ငယ်ကြောင်းတွေ့ရှိရပြန်သည်။ 1.41 နှင့် 1.42 ကြားရှိ ရာရှင်နယ်ကိန်းများကို ဆက်လက်ရှာကြည့်ပါက x သည် 1.414 ထက်ကြီးပြီး 1.415 အောက်ငယ်ကြောင်း တွေ့ရှိရပြန်သည်။ ဤနည်းအတိုင်း ဆက်လက်ရှာသွားခြင်းဖြင့်

လိုအပ်သောကိန်း x ၏တန်ဖိုး ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုကို ရနိုင်မည်ဟုမပြောနိုင်ပေ။ တစ်ဖန် 2 ၏ နှစ်ထပ်ကိန်းရင်းသည်လည်း ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခု ဖြစ် မဖြစ် ဆိုသည်ကို အသေအချာ မပြောနိုင်ပေ။ ဤအချက်ကိုဖြေရှင်းရန် ကိန်းပြည့်နှင့်ပတ်သက်သော ဂုဏ်သတ္တိတစ်ခုကို ဦးစွာ လေ့လာကြမည်။

ကိန်းပြည့် a သည် စုံကိန်းဖြစ်လျှင်သော်လည်းကောင်း၊ မကိန်းဖြစ်လျှင်သော်လည်းကောင်း ထိုကိန်း၏ နှစ်ထပ်ကိန်းအကြောင်း ကျွန်ုပ်တို့ မည်သို့ပြောနိုင်မည်ကို ဥပမာအချို့ဖြင့် လေ့လာကြည့်မည်။

$6 = 2 \times 3$ သည် စုံကိန်းတစ်ခုဖြစ်သည်။ ယင်း၏နှစ်ထပ်ကိန်း $6 \times 6 = 36 = 2 \times 18$ သည်လည်း စုံကိန်းဖြစ်သည်။ တစ်ဖန် $24 = 2 \times 12$ သည် စုံကိန်းဖြစ်သည်။ ယင်း၏နှစ်ထပ်ကိန်း $24 \times 24 = 576 = 2 \times 288$ သည်လည်း စုံကိန်းဖြစ်သည်။ စုံကိန်းတစ်ခု၏ နှစ်ထပ်ကိန်းသည် စုံကိန်းတစ်ခုပင်ဖြစ်ကြောင်း အောက်ပါအတိုင်းသက်သေပြနိုင်သည်။

a သည် စုံကိန်းတစ်ခုဖြစ်လျှင် $a = 2 \times b$ ဟုရေးနိုင်သည်။ ဤတွင် b သည် ကိန်းပြည့်တစ်ခု ဖြစ်သည်။ a ၏နှစ်ထပ်ကိန်းကိုရှာလျှင်

$$\begin{aligned} a^2 &= (2b)^2 \\ &= 4b^2 = 2 \times (2b^2) \end{aligned}$$

ယာဘက်ရှိကိန်းသည် 2 ၏ ဆတိုးကိန်းဖြစ်သဖြင့် ထိုကိန်းသည် စုံကိန်းဖြစ်သည်။ ထို့ကြောင့် စုံကိန်း၏နှစ်ထပ်ကိန်းသည် စုံကိန်းဖြစ်သည်။

ဆက်လက်၍ မကိန်းများ၏နှစ်ထပ်ကိန်းကို လေ့လာကြမည်။ 3 သည် မကိန်းဖြစ်ပြီး ယင်း၏နှစ်ထပ်ကိန်း $3 \times 3 = 9 = (2 \times 4) + 1$ သည် မကိန်းတစ်ခုဖြစ်သည်။ ထို့အတူ မကိန်း တစ်ခုဖြစ်သော 17 ၏နှစ်ထပ်ကိန်း $17 \times 17 = 289 = (2 \times 144) + 1$ သည်လည်း မကိန်းတစ်ခု ဖြစ်သည်။ မကိန်းတစ်ခု၏နှစ်ထပ်ကိန်းသည် မကိန်းတစ်ခုပင်ဖြစ်ကြောင်းကိုလည်း တွေ့နိုင်သည်။

a သည် မကိန်းတစ်ခုဖြစ်လျှင် $a = 2b + 1$ ဟုရေးနိုင်သည်။ ဤတွင် b သည် ကိန်းပြည့် တစ်ခု ဖြစ်သည်။ a ၏နှစ်ထပ်ကိန်း

$$\begin{aligned} a^2 &= (2b+1)^2 \\ &= 4b^2 + 4b + 1 \\ &= 2(2b^2 + 2b) + 1 \end{aligned}$$

သည်လည်း မကိန်းတစ်ခုဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရသည်။

ထို့ကြောင့် မကိန်းတစ်ခု၏နှစ်ထပ်ကိန်းသည် မကိန်းဖြစ်သည်။ ယေဘုယျအားဖြင့် အောက်ပါ အတိုင်း မှတ်သားနိုင်သည်။

စုံကိန်းတစ်ခု၏နှစ်ထပ်ကိန်းသည် စုံကိန်းဖြစ်ပြီး မကိန်းတစ်ခု၏နှစ်ထပ်ကိန်းသည် မကိန်းဖြစ်သည်။

ကိန်းပြည့်များ၏ထပ်ကိန်းဆိုင်ရာ အထက်ပါဂုဏ်သတ္တိကို လေ့လာပြီးနောက် "$\sqrt{2}$ သည် ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုမဟုတ်" ဟူသောအဆိုကို သက်သေပြမည်။

သက်သေပြချက်

$\sqrt{2}$ ၏ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်ဖိုးကို $\frac{p}{q}$ ဟုယူဆထားပါ။ ဤတွင် **$q \neq 0$ ဖြစ်ပြီး p နှင့် q တို့၌ ဘုံဆခွဲကိန်းမရှိ** ဟုထားမည်။ ထို့ကြောင့်

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$
$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$
$$\frac{p^2}{q^2} = 2$$
$$p^2 = 2 \times q^2$$

ဤတွင် p^2 သည် စုံကိန်းတစ်ခုဖြစ်ကြောင်းတွေ့နိုင်သည်။ အဘယ်ကြောင့်ဆိုသော် မကိန်းတစ်ခု၏ နှစ်ထပ်ကိန်းသည် မကိန်းသာဖြစ်သောကြောင့် p သည် မကိန်း မဖြစ်နိုင်ပေ။ ထို့ကြောင့် p သည် စုံကိန်းတစ်ခု ဖြစ်မည်။ ထိုအခါ $p = 2r$ ဟု ရေးနိုင်သည်။ ဤတွင် r သည် ကိန်းပြည့်တစ်ခုဖြစ်သည်။ $p^2 = 2 \times q^2$ တွင် p ၏တန်ဖိုးကို အစားသွင်းသော်

$$(2r)^2 = 2q^2$$
$$4r^2 = 2q^2$$
$$2r^2 = q^2$$

ဤတွင် q^2 သည် စုံကိန်းတစ်ခုဖြစ်ကြောင်းတွေ့နိုင်သည်။ ထို့ကြောင့် q သည်လည်း စုံကိန်းတစ်ခုဖြစ်သည်။ ထို့ကြောင့် p နှင့် q တို့သည် စုံကိန်းများဖြစ်၍ ၎င်းတို့ကို 2 ဖြင့် အပြတ်စားနိုင်သည်။ p နှင့် q တို့၌ ဘုံဆခွဲကိန်း 2 ရှိကြောင်းတွေ့ရသည်။ p နှင့် q တို့၌ ဘုံဆခွဲကိန်းမရှိဟူသော ယူဆချက်ကို ဆန့်ကျင်နေသည်။ ထို့ကြောင့် $\sqrt{2}$ သည် ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခု မဖြစ်ပေ။

အထက်ပါဆွေးနွေးချက်၏ ရလဒ်တစ်ခုမှာ ဂျီသြမေတြီနှင့် အက္ခရာသင်္ချာရှုထောင့်တို့မှ ကြည့်လျှင် ရာရှင်နယ်ကိန်းများသည် လက်တွေ့ဘဝတွင် တိကျစွာအသုံးပြုနိုင်ရန် ပြည့်စုံလုံလောက်သောကိန်းများမဟုတ်ကြောင်း တွေ့ရှိရခြင်းဖြစ်သည်။ ဂျီသြမေတြီရှုထောင့်မှ ကြည့်ပါက ရာရှင်နယ်ကိန်းများသည် အလျားများကို ဖော်ပြရန်အတွက် ပြည့်စုံလုံလောက်မှု မရှိပေ။ ဥပမာ အနားတစ်ဖက်လျှင် 1 ယူနစ်စီရှိသောစတုရန်းတစ်ခု၏ ထောင့်ဖြတ်မျဉ်းအလျားကို ရာရှင်နယ်ကိန်းဖြင့် မဖော်ပြနိုင်ပေ။ အက္ခရာသင်္ချာရှုထောင့်မှကြည့်လျှင်လည်း 2 ကဲ့သို့သောကိန်း တစ်ခု၏ နှစ်ထပ်ကိန်းရင်းကိုဖော်ပြရန် ရာရှင်နယ်ကိန်းများသည် ပြည့်စုံလုံလောက်မှု မရှိပြန်ပေ။ ထို့ကြောင့် **အီရာရှင်နယ်ကိန်းများ** (irrational numbers) ဟုခေါ်သော အခြားကိန်းများ ဖြည့်စွက်ပြီး ကိန်းစစ်များကို တည်ဆောက်ခဲ့ကြသည်။

၁.၂ အီရာရှင်နယ်ကိန်းများ

ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုကို အဆုံးရှိသောဒသမကိန်းတစ်ခုအဖြစ်လည်းကောင်း၊ အဆုံးမရှိသောပြန်ထပ်ဒသမကိန်းတစ်ခုအဖြစ်လည်းကောင်း ဖော်ပြနိုင်သည်ကို သိရှိပြီးဖြစ်သည်။ ဥပမာ အားဖြင့်

$\frac{1}{4} = 0.25, \quad \frac{1}{3} = 0.333...,$

$\frac{1}{4} = 0.25$ ကို ကိန်းတစ်ခုချင်းစီ၏ နေရာလိုက်တန်ဖိုးအရ $\frac{1}{4} = \frac{2}{10}+\frac{5}{100}$ ဟု ဖော်ပြနိုင်သည်။ ထို့အတူ $\frac{1}{3} = 0.333...,$ ကိုလည်း $\frac{1}{3} = \frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$ ဟုဖော်ပြနိုင်သည်။ ဤတွင် $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$ ကို အနန္တကိန်းစဉ်တန်း (infinite series) ဟု ခေါ်သည်။ ထို့ကြောင့် $\frac{1}{3} = 0.333...$ ဟုရေးရာတွင် အနန္တကိန်းစဉ်တန်း $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$ သည် ရာရှင်နယ်ကိန်း $\frac{1}{3}$ သို့ တဖြည်းဖြည်း ချဉ်းကပ်သည်။ ထို့ကြောင့် ရာရှင်နယ်ကိန်းများကို အဆုံးရှိသောဒသမကိန်းတစ်ခုအဖြစ်လည်းကောင်း၊ အဆုံးမရှိသောပြန်ထပ်ဒသမကိန်းတစ်ခု အဖြစ်လည်းကောင်း ဖော်ပြနိုင်ကြောင်းတွေ့ရသည်။

တစ်ဖန် အဆုံးမရှိသောပြန်ထပ်ဒသမကိန်းပုံစံဖြင့် ဖော်ပြ၍မရနိုင်သောကိန်းများကို လေ့လာကြည့်မည်။ အနန္တကိန်းစဉ်တန်း $\frac{1}{10}+\frac{0}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{0}{10000}+\frac{0}{100000}+\frac{1}{1000000}+\cdots$ သည် 0.101001... ကို ဖော်ပြသည်။ ဤကိန်းသည် အဆုံးမရှိသော ပြန်မထပ်ဒသမကိန်းတစ်ခုဖြစ်သည်။ ဤကဲ့သို့သော **အဆုံးလည်းမရှိ ပြန်လည်းမထပ်သောဒသမကိန်းများ**ကို **အီရာရှင်နယ်ကိန်းများ**ဟု ခေါ်သည်။

နှစ်ထပ်ကိန်းသည် 2 ဖြစ်စေသော ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုမရှိကြောင်း ခေါင်းစဉ် ၁. ၁ တွင် လေ့လာတွေ့ရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ယင်းတွင် အပေါင်းကိန်းတစ်ခု x ကို နှစ်ထပ်ပြုသောအခါ 2 ရရှိစေမည့် ကိန်း x ကို ရှာရာတွင် $x = 1.414$ အထိရခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ထိုနည်းအတိုင်း ဆက်လက်ရှာကြည့်ပါက $x = 1.4142135...$ ဟူသောအဆုံးမရှိသည့် ပြန်မထပ်သောဒသမကိန်း တစ်ခုကို ရရှိမည်ဖြစ်သည်။ ထို့ကြောင့် $\sqrt{2}$ သည် အီရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုဖြစ်သည်။

ထို့အတူ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ တို့၏တန်ဖိုးကို အောက်ပါအတိုင်း တွေ့နိုင်သည်။

$$\sqrt{3} = 1.7320508...$$

$$\sqrt{5} = 2.2360679...$$

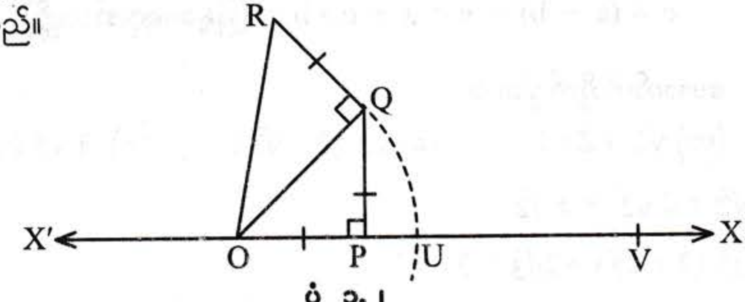
$$\sqrt{7} = 2.6457513...$$

ယင်းတို့သည် အီရာရှင်နယ်ကိန်းများဖြစ်ကြသည်။ စက်ဝိုင်းတစ်ခု၏အဝန်းနှင့် အချင်းမျဉ်းတို့၏အချိုးတန်ဖိုး $\pi = 3.141592...$ သည်လည်း အီရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုဖြစ်သည်။

၁.၃ အီရာရှင်နယ်ကိန်းများဆိုင်ရာအခြေခံလုပ်ထုံးများ

၁.၃.၁ ပေါင်းခြင်းနှင့်မြှောက်ခြင်း

အီရာရှင်နယ်ကိန်းများ၏ပေါင်းခြင်းကို ရာရှင်နယ်ကိန်းများကဲ့သို့ပင် ကိန်းမျဉ်းအသုံးပြု၍ ဖော်ပြနိုင်သည်။



ပုံ ၁.၂

ပုံ ၁. ၂ တွင် OP, PQ နှင့် QR တို့သည် အလျား 1 ယူနစ်ရှိသော မျဉ်းပိုင်းများဖြစ်ကြသည်။ $\angle OPQ$ နှင့် $\angle OQR$ တို့သည် ထောင့်မှန်များဖြစ်ကြသည်။ ထိုအခါ ပိုက်သာဂိုရပ်၏သီအိုရမ်အရ $OQ = \sqrt{2}$, $OR = \sqrt{3}$ ဖြစ်မည်။ O ကို ဗဟိုထား၍ အချင်းဝက် OQ ဖြင့် စက်ဝန်းပိုင်းတစ်ခုဆွဲရာ OX ကို U တွင်ဖြတ်သည်။ $OU = \sqrt{2}$ ဖြစ်မည်။ တစ်ဖန် U ကို ဗဟိုထား၍ အချင်းဝက် OR အလျားရှိသော စက်ဝန်းပိုင်းတစ်ခုဆွဲရာ OX ကို V တွင် ဖြတ်သည်။ ဤတွင် $UV = \sqrt{3}$ ဖြစ်မည်။ ထိုအခါ မျဉ်းပိုင်း OV ၏ အလျားသည် $OU + UV$ ဖြစ်သောကြောင့် $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ဖြစ်မည်။

ဤသည်ကိုကြည့်ခြင်းအားဖြင့် $\sqrt{2}$ နှင့် $\sqrt{3}$ တို့ကဲ့သို့ အီရာရှင်နယ်ကိန်းများအတွက် မျဉ်းပိုင်းအလျားဖြင့် လွယ်ကူစွာဖော်ပြနိုင်သကဲ့သို့ $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ကိုလည်း ကိန်းမျဉ်းပေါ်တွင် လွယ်ကူစွာ ဖော်ပြနိုင်ကြောင်းတွေ့ရသည်။ အခြားသော အီရာရှင်နယ်ကိန်းများ၏ပေါင်းခြင်းကို လည်း ဤနည်းအတိုင်းဖော်ပြနိုင်သည်။

အီရာရှင်နယ်ကိန်းများ ပေါင်းခြင်း၊ နုတ်ခြင်းဆိုင်ရာလုပ်ထုံးများသည် ရာရှင်နယ်ကိန်း များဆိုင်ရာ လုပ်ထုံးများနှင့်အတူတူပင်ဖြစ်သည်။ ရာရှင်နယ်ကိန်းများ ပေါင်းခြင်းနှင့် မြှောက်ခြင်း တို့တွင် ဖလှယ်ရဂုဏ်သတ္တိ၊ ဖက်စပ်ရဂုဏ်သတ္တိနှင့် ဖြန့်ဝေရဂုဏ်သတ္တိတို့ မှန်ကန်သကဲ့သို့ အီရာရှင်နယ်ကိန်းများပေါင်းခြင်းနှင့် မြှောက်ခြင်းတွင်လည်း အဆိုပါဂုဏ်သတ္တိများ မှန်ကန်သည်။

ထို့ကြောင့် a, b နှင့် c တို့သည် အီရာရှင်နယ်ကိန်းများဖြစ်လျှင် အောက်ပါဂုဏ်သတ္တိများ ကို ပြေလည်သည်။

$a + b = b + a$ (အပေါင်းဖလှယ်ရဂုဏ်သတ္တိ)

$a \times b = b \times a$ (အမြှောက်ဖလှယ်ရဂုဏ်သတ္တိ)

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (အပေါင်းဖက်စပ်ရဂုဏ်သတ္တိ)

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (အမြှောက်ဖက်စပ်ရဂုဏ်သတ္တိ)

$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ (ဖြန့်ဝေရဂုဏ်သတ္တိ)

$c \times (a + b) = c \times a + c \times b$ (ဖြန့်ဝေရဂုဏ်သတ္တိ)

ပုံစံတွက်။ အောက်ပါတို့ကိုရှင်းပါ။

(က) $\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ (ခ) $\sqrt{3}\,(2 + \sqrt{3})$ (ဂ) $3\sqrt{5}\,(\sqrt{5} + 3)$

(က) $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

(ခ) $\sqrt{3}\,(2 + \sqrt{3}) = 2\sqrt{3} + 3$

(ဂ) $3\sqrt{5}\,(\sqrt{5} + 3) = 15 + 9\sqrt{5}$

၁.၃.၂ နုတ်ခြင်းနှင့်အနုတ်အီရာရှင်နယ်ကိန်းများ

အနုတ်အီရာရှင်နယ်ကိန်းများကို အနုတ်ရာရှင်နယ်ကိန်းများကဲ့သို့ပင် သတ်မှတ်မည်။ ထိုအခါ $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\pi$ တို့သည် $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$ တို့၏ အနုတ်အီရာရှင်နယ်ကိန်းများ ဖြစ်ကြပြီး

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

$$\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$$

$$\pi + (-\pi) = 0$$ တို့ ဖြစ်ကြသည်။

အီရာရှင်နယ်ကိန်းများနုတ်ခြင်းကို ပေါင်းခြင်း၏ပြောင်းပြန်အဖြစ် ရာရှင်နယ်ကိန်းများကဲ့သို့ပင် သတ်မှတ်မည်။ ထို့ကြောင့် $a + b = b + a = 0$ ဖြစ်သော အီရာရှင်နယ်ကိန်း b ကို အီရာရှင်နယ်ကိန်း a ၏ အပေါင်းပြောင်းပြန်ကိန်းဟုခေါ်ပြီး သင်္ကေတအားဖြင့် $-a$ ဟု ရေးမည်။ $a + (-a) = (-a) + a = 0$ ဖြစ်သဖြင့် a ၏ အပေါင်းပြောင်းပြန်ကိန်းသည် $-a$ ဖြစ်ပြီး $-a$ ၏ အပေါင်းပြောင်းပြန်ကိန်းသည် $-(-a) = a$ ဖြစ်သည်။

ယခုဆက်လက်၍ အီရာရှင်နယ်ကိန်းများနုတ်ခြင်းကို သတ်မှတ်မည်။

a နှင့် b သည် အီရာရှင်နယ်ကိန်းများဖြစ်ကြလျှင် b ကို a မှ နုတ်ရန် b ၏ အပေါင်းပြောင်းပြန်ကိန်း $-b$ ကို a တွင် ပေါင်းရမည်။ သင်္ကေတအားဖြင့် $a - b = a + (-b)$ ဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက်။ အောက်ပါတို့ကို ရှင်းပါ။

(က) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$ (ခ) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

(က) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(ခ) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$

၁.၃.၃ စားခြင်းနှင့်လှန်ကိန်းများ

အီရာရှင်နယ်ကိန်းများစားခြင်းဆိုင်ရာလုပ်ထုံးကို မြှောက်ခြင်း၏ ပြောင်းပြန်လုပ်ထုံးအဖြစ် သတ်မှတ်မည်။ ရာရှင်နယ်ကိန်းများကဲ့သို့ပင် အီရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခု၏ လှန်ကိန်းကို ထိုကိန်းနှင့် ပေးရင်းကိန်းတို့၏မြှောက်လဒ်သည် 1 ဖြစ်စေသော ကိန်းတစ်ခုအဖြစ်သတ်မှတ်မည်။ ဥပမာအားဖြင့် $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}$ တို့သည် $\sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{7}$ တို့၏ လှန်ကိန်းများဖြစ်ကြသည်။ တစ်နည်းအားဖြင့်ဆိုသော် a သည် အီရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုဖြစ်လျှင် $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$ ဖြစ်သည်။

a နှင့် b သည် အီရာရှင်နယ်ကိန်းများဖြစ်ကြလျှင် $a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ ဟု သတ်မှတ်သည်။

ပုံစံတွက်။ အောက်ပါတို့ကို ရှင်းပါ။

(က) $2\sqrt{2} \div 3\sqrt{2}$ (ခ) $10\sqrt{3} \div 2\sqrt{3}$ (ဂ) $2\sqrt{3} \div 5$

(က) $2\sqrt{2} \div 3\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$

(ခ) $10\sqrt{3} \div 2\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 5$

(ဂ) $2\sqrt{3} \div 5 = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$

၁.၄ အီရာရှင်နယ်ကိန်းများပါဝင်သောကိန်းတန်းများကိုရှင်းခြင်း

ရာရှင်နယ်ကိန်းနှစ်ခု ပေါင်းလျှင်သော်လည်းကောင်း၊ နုတ်လျှင်သော်လည်းကောင်း၊ မြှောက်လျှင်သော်လည်းကောင်း၊ စားလျှင်သော်လည်းကောင်း ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုသာရရှိကြောင်း သိရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ တစ်နည်းအားဖြင့် ဂဏန်းသင်္ချာအခြေခံလုပ်ထုံးများအသုံးပြုလျက် ရာရှင်နယ်ကိန်းများသာပါဝင်သောကိန်းတန်းတစ်ခုကို ဖြေရှင်းပါက ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုသာရသည် သို့သော် အီရာရှင်နယ်ကိန်းများပါဝင်သော ကိန်းတန်းတစ်ခုကို ဖြေရှင်းပါက ရာရှင်နယ်ကိန်း သို့မဟုတ် အီရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုရမည် မရမည်ကို တိတိကျကျ မပြောနိုင်ပေ။ အီရာရှင်နယ်ကိန်းများပါဝင်သော အချိုးတစ်ခု၏ ပိုင်းခြေကို ကိန်းပြည့်တစ်ခုဖြစ်အောင် ဖော်ပြနိုင်သည်။

ဥပမာ။ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ကို $\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ ကို $\dfrac{4\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ ဟူ၍ ပြောင်းလဲရေးနိုင်သည်။

ဤသို့လုပ်ဆောင်ခြင်းကို **ပိုင်းခြေကို ရာရှင်နယ်ကိန်းအဖြစ်ပြောင်းခြင်း** (rationalising the denominator) ဟုခေါ်သည်။

အီရာရှင်နယ်ကိန်းများပါဝင်သော ကိန်းတန်းများကိုဖြေရှင်းရာတွင် အက္ခရာသင်္ချာမှ မျိုးတူကိန်းလုံးများနှင့် မျိုးမတူကိန်းလုံးများကို ဖြေရှင်းသည့်လုပ်ထုံးများ အတိုင်းဖြေရှင်းနိုင်သည်။

ပုံစံတွက်။ အောက်ပါကိန်းတန်းများကို ရှင်းပါ။

(က) $(\sqrt{7}-2\sqrt{2})(\sqrt{7}+3\sqrt{2})$ (ခ) $5\sqrt{3}-\dfrac{4}{\sqrt{3}}+7\sqrt{3}$

(ဂ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ (ဃ) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}-11\sqrt{3}+7\sqrt{2}-\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

(က) $(\sqrt{7}-2\sqrt{2})(\sqrt{7}+3\sqrt{2}) = 7+3\sqrt{14}-2\sqrt{14}-12 = \sqrt{14}-5$

(ခ) $5\sqrt{3}-\dfrac{4}{\sqrt{3}}+7\sqrt{3} = 12\sqrt{3}-\dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{36-4}{\sqrt{3}} = \dfrac{32\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \dfrac{32\sqrt{3}}{3}$

(ဂ) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{15\sqrt{2}+10\sqrt{3}+6\sqrt{5}}{30}$

(ဃ) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}-11\sqrt{3}+7\sqrt{2}-\dfrac{6}{\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}+7\sqrt{2}-11\sqrt{3}-\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{3+14}{\sqrt{2}} - \frac{33+6}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{17}{\sqrt{2}} - \frac{39}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{17\sqrt{2}}{2} - \frac{39\sqrt{3}}{3}$$

$$= \frac{17}{2}\sqrt{2} - 13\sqrt{3}$$

၁.၅ အီရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခု၏ တန်ဖိုးကိုခန့်မှန်းခြင်း

နှစ်ထပ်ကိန်းရင်းများရှာရာတွင်လည်းကောင်း၊ သုံးထပ်ကိန်းရင်းများ ရှာရာတွင်လည်းကောင်း၊ ညီမျှခြင်းများဖြေရှင်းရာတွင်လည်းကောင်း အီရာရှင်နယ်ကိန်းများကို ရံဖန်ရံခါ အသုံးပြုရန် လိုအပ်သည်။ သို့ရာတွင် လက်တွေ့နေ့စဉ်ဘဝတွင် အသုံးနည်းသည့်အလျောက် ကျွန်ုပ်တို့အနေဖြင့် ထိုကိန်းများနှင့် အကျွမ်းဝင်မှုနည်းကြသည်။ ရောင်းဝယ်မှုကိစ္စရပ်များ၊ လက်တွေ့တိုင်းတာမှု အခြင်အတွယ်ကိစ္စရပ်များတွင် ရာရှင်နယ်ကိန်းများကိုသာအသုံးပြုကြသည်။ သို့သော် သိပ္ပံဆိုင်ရာ ပြဿနာများနှင့် စီးပွားရေးပြဿနာများကို သင်္ချာနည်းဖြင့်ဖြေရှင်းရာတွင် အီရာရှင်နယ်ကိန်းများပါဝင် နေသည့်တိုင်အောင် အဖြေများကိုရာရှင်နယ်ကိန်းဖြင့်သာ ဖော်ပြကြသည်။ ထိုအဖြေများသည် တိကျသောအဖြေများ မရနိုင်သောကြောင့် အီရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုနှင့် တန်ဖိုးနီးကပ်သော ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုဖြင့် တွက်လေ့ရှိသည်။ ထို့ကြောင့် လက်တွေ့တွင် အီရာရှင်နယ်ကိန်းများကို ယင်းတို့၏ ဒသမကိန်းတန်ဖိုးမှ ဒသမတစ်နေရာရာအထိ အမှန်နီးပါးတန်ဖိုးများယူ၍ အသုံးပြုကြ သည်။ ဥပမာအားဖြင့် ဒသမသုံးနေရာအထိသာ အမှန်တန်ဖိုးများယူလျှင်

$\sqrt{2}+1 = 1.414 + 1 = 2.414$

$\sqrt{3}-\sqrt{2} = 1.732 - 1.414 = 0.318$ ဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရသည်။

၌တွင် ယာဘက်ရှိတန်ဖိုးများသည် ဝဲဘက်ရှိတန်ဖိုးများ၏ ခန့်မှန်းတန်ဖိုးများသာ ဖြစ်ကြောင်း သတိပြုပါ။

လေ့ကျင့်ခန်း ၁.၁

၁။ အီရာရှင်နယ်ကိန်း 5 ခုကို ဖော်ပြပါ။

၂။ အောက်ပါတို့မှ မည်သည်တို့သည်ရာရှင်နယ်ကိန်းများဖြစ်၍ မည်သည်တို့သည်အီရာရှင်နယ် ကိန်းများဖြစ်ကြသနည်း။

(က) $\frac{2}{3}$ (ခ) $\frac{2}{3}+5$ (ဂ) $\frac{2}{7}-\sqrt{3}$ (ဃ) $3-\sqrt{3}$

(င) $\sqrt{2}+\sqrt{2}$ (စ) $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ (ဆ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ဇ) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

၃။ ဒသမငါးနေရာအထိ အမှန်နီးပါးတန်ဖိုးများယူလျှင် $\sqrt{2}=1.41421$, $\sqrt{3}=1.73205$ နှင့် $\sqrt{5}=2.23606$ တို့ဖြစ်ကြသော်

(က) $\sqrt{2}$ နှင့် $\sqrt{3}$ တို့၏တန်ဖိုးကို ဒသမသုံးနေရာအထိယူပြီး $\sqrt{2}\times\sqrt{3}$ ၏တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

(ခ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ၏တန်ဖိုးကို ဒသမသုံးနေရာအထိရှာပါ။

(ဂ) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{5}$ ၏တန်ဖိုးကို ဒသမသုံးနေရာအထိရှာပါ။

၄။ အောက်ပါတို့မှ ပိုင်းခြေကို ရာရှင်နယ်ကိန်းအဖြစ်ပြောင်း၍ဖော်ပြပါ။

(က) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (ခ) $\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ (ဂ) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ (ဃ) $\frac{1}{5-\sqrt{2}}$

၅။ အောက်ပါကိန်းတန်းများကို ရှင်းပါ။

(က) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ (ခ) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}}$

(ဂ) $\frac{3+3\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\div\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ (ဃ) $\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{5}}+\frac{7}{\sqrt{7}}$

(င) $\frac{3}{\sqrt{5}}+13\sqrt{3}-7\sqrt{5}+\frac{9}{\sqrt{3}}$ (စ) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

၁.၆ ကိန်းစစ်များနှင့်ကိန်းစစ်မျဉ်း

ရာရှင်နယ်ကိန်းများကို အဆုံးရှိသောဒသမကိန်းများဖြင့်သော်လည်းကောင်း၊ အဆုံးမရှိသော ပြန်ထပ်ဒသမကိန်းများဖြင့်သော်လည်းကောင်း ဖော်ပြနိုင်ပြီး အီရာရှင်နယ်ကိန်းများကိုမူ အဆုံးမရှိ သောပြန်မထပ်ဒသမကိန်းများဖြင့်သာ ဖော်ပြနိုင်သည်။ ရာရှင်နယ်ကိန်းများနှင့် အီရာရှင်နယ်ကိန်း များအားလုံးကို ကိန်းစစ်များဟုခေါ်သည်။

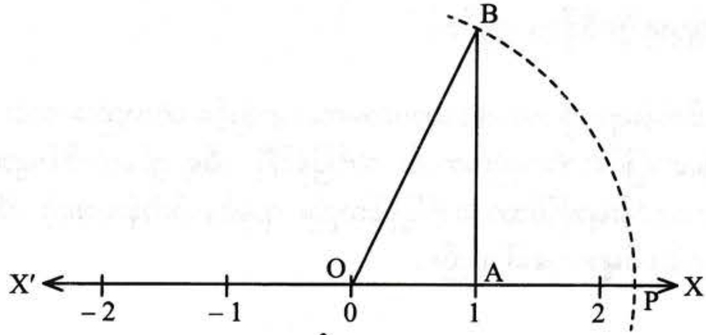
- ကိန်းစစ်များ (real numbers)
  - ရာရှင်နယ်ကိန်းများ (rational numbers)
    - ကိန်းပြည့်များ (integers)
      - အနုတ်ကိန်းပြည့်များ (negative integers)
      - အပြည့်ကိန်းများ (whole numbers)
        - သုည (zero)
        - သဘာဝကိန်းများ (natural numbers)
    - အပိုင်းကိန်းများ (fractions)
  - အီရာရှင်နယ်ကိန်းများ (irrational numbers)

ရာရှင်နယ်ကိန်းများကို ကိန်းမျဉ်းပေါ်တွင်မည်ကဲ့သို့ဖော်ပြနိုင်ကြောင်း သိရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ရာရှင်နယ်ကိန်းအားလုံးကို ကိန်းမျဉ်းပေါ်ရှိ အမှတ်များဖြင့်ကိုယ်စားပြုဖော်ပြလျှင်လည်း အမှတ်များ ကုန်မသွားဘဲ အများအပြားကျန်နေမည်ဖြစ်သည်။ တစ်နည်းအားဖြင့်ဆိုသော် ကိန်းမျဉ်းပေါ်တွင် နေရာလပ်အများအပြားကျန်နေမည်ဖြစ်သည်။ အီရာရှင်နယ်ကိန်းများသည် ထိုနေရာလပ်များတွင် ရှိနေခြင်းဖြစ်သည်။ အားလုံးသော ရာရှင်နယ်ကိန်းများနှင့် အီရာရှင်နယ်ကိန်းများပါဝင်သည့် ကိန်းစစ်များကို ကိုယ်စားပြုဖော်ပြထားသောကိန်းမျဉ်းကို ကိန်းစစ်မျဉ်းဟု ခေါ်သည်။

အောက်ပါဥပမာများတွင် လွယ်ကူသော**အီရာရှင်နယ်ကိန်းအချို့အား** ကိန်းစစ်မျဉ်းပေါ်တွင် ဖော်ပြပုံကို လေ့လာနိုင်ပါသည်။

ဥပမာ ၁။ အီရာရှင်နယ်ကိန်း $\sqrt{5}$ ကို ကိန်းစစ်မျဉ်းပေါ်တွင် ကိုယ်စားပြုသောအမှတ်အား ဖော်ပြပါ။

$5 = 1^2 + 2^2$ ဖြစ်သဖြင့် အလျား $\sqrt{5}$, 1 နှင့် 2 တို့ရှိကြသော အနားများ ပါဝင်သည့် ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခုကို တည်ဆောက်နိုင်သည်။



ပုံ ၁.၃

ပုံ ၁. ၃ တွင် X'OX သည် ကိန်းစစ်မျဉ်းတစ်ခုဖြစ်၍ O နှင့် A သည် 0 နှင့် 1 ကို ကိုယ်စားပြုသည်။ OA ကို ထောင့်မတ်ကျသောမျဉ်း AB = 2 OA အား ဆွဲပါ။ ထို့ကြောင့်

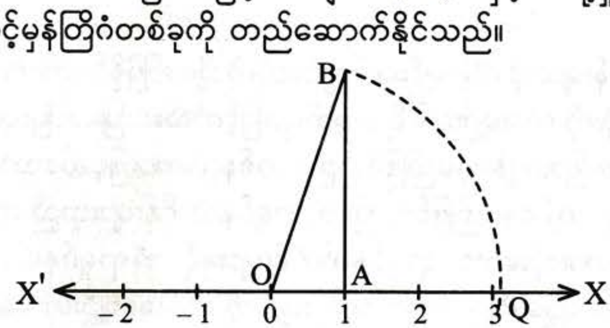
$OB^2 = OA^2 + AB^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

$OB = \sqrt{5}$ ဖြစ်သည်။

O ကို ဗဟိုထား၍ အချင်းဝက် OB ဖြင့် စက်ဝန်းပိုင်းတစ်ခုဖြတ်ဆွဲရာ OX ကို P ၌ ဖြတ်သည်။ ဤတွင်အမှတ် P သည် အီရာရှင်နယ်ကိန်း $\sqrt{5}$ ရှိသည့်နေရာကို ဖော်ပြသည်။

ဥပမာ ၂။ အီရာရှင်နယ်ကိန်း $\sqrt{10}$ ကို ကိန်းစစ်မျဉ်းပေါ်တွင် ကိုယ်စားပြုသောအမှတ်အား ဖော်ပြပါ။

$10 = 1^2 + 3^2$ ဖြစ်သဖြင့် အလျား $\sqrt{10}$, 1 နှင့် 3 တို့ရှိကြသော အနားများ ပါဝင်သည့် ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခုကို တည်ဆောက်နိုင်သည်။



ပုံ ၁.၄

ပုံ ၁. ၄ တွင် X'OX သည် ကိန်းစစ်မျဉ်းတစ်ခုဖြစ်၍ O နှင့် A သည် 0 နှင့် 1 ကို ကိုယ်စားပြုသည်။ OA ကို ထောင့်မတ်ကျသောမျဉ်း AB = 3 OA အား ဆွဲပါ။ ထို့ကြောင့်

$OB^2 = OA^2 + AB^2 = 1^2 + 3^2 = 10$

$OB = \sqrt{10}$ ဖြစ်သည်။

O ကို ဗဟိုထား၍ အချင်းဝက် OB ဖြင့် စက်ဝန်းပိုင်းတစ်ခုဖြတ်ဆွဲရာ OX ကို Q ၌ ဖြတ်သည်။ ဤတွင်အမှတ် Q သည် အီရာရှင်နယ်ကိန်း $\sqrt{10}$ ရှိသည့်နေရာကို ဖော်ပြသည်။

၁.၇ ကိန်းစစ်စနစ်၏ဂုဏ်သတ္တိများ

ရာရှင်နယ်ကိန်းများကဲ့သို့ပင် ကိန်းစစ်များ ပေါင်းခြင်းနှင့်မြှောက်ခြင်း ဆိုင်ရာလုပ်ထုံးများတွင် အောက်ပါဂုဏ်သတ္တိများရှိသည်။

a, b နှင့် c တို့သည် ကိန်းစစ်များဖြစ်ကြလျှင်

(က) $a + b$ သည် ကိန်းစစ်ဖြစ်သည်။ (အပေါင်းဆိုင်ရာပိတ်ခြင်းဂုဏ်သတ္တိ)

(ခ) $a + b = b + a$ (အပေါင်းဖလှယ်ရဂုဏ်သတ္တိ)

(ဂ) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (အပေါင်းဖက်စပ်ရဂုဏ်သတ္တိ)

(ဃ) $a + 0 = a$ (အပေါင်းထပ်တူရဂုဏ်သတ္တိ)

(င) $a + (-a) = 0$ (အပေါင်းပြောင်းပြန်ဂုဏ်သတ္တိ)

(စ) ab သည် ကိန်းစစ်ဖြစ်သည်။ (အမြှောက်ဆိုင်ရာပိတ်ခြင်းဂုဏ်သတ္တိ)

(ဆ) $ab = ba$ (အမြှောက်ဖလှယ်ရဂုဏ်သတ္တိ)

(ဇ) $a \times 1 = a$ (အမြှောက်ထပ်တူရဂုဏ်သတ္တိ)

(ဈ) $a \times \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$ (အမြှောက်ပြောင်းပြန်ဂုဏ်သတ္တိ)

(ည) $a(b + c) = ab + ac$ (ဖြန့်ဝေရဂုဏ်သတ္တိ) တို့ဖြစ်ကြသည်။

ထို့ပြင် ကိန်းစစ်များတွင် ကြီးစဉ်ငယ်လိုက် အစီအစဉ်ရှိသည်။ ထို့ကြောင့် ကိန်းစစ်နှစ်ခုကို နှိုင်းယှဉ်၍ရသည်။ a နှင့် b တို့သည် ကိန်းစစ်များဖြစ်ကြလျှင် a သည် b နှင့် တူညီမည် သို့မဟုတ် a သည် b အောက်ငယ်မည် သို့မဟုတ် a သည် b ထက်ကြီးမည် ဟူသောအချက်သုံးချက်မှ တစ်ခုသာလျှင် မှန်ပေမည်။ ၎င်းဂုဏ်သတ္တိ **"Trichotomy axiom"** ကို **သုံးမျိုးတစ်မျိုးရနဂိုမှန်အဆို** ဟုခေါ်သည်။ ထို့ပြင် ကိန်းစစ်များတွင် မညီမျှချက်ဆိုင်ရာဂုဏ်သတ္တိများလည်း ရှိသေးသည်။

a, b နှင့် c တို့သည် ကိန်းစစ်များဖြစ်ကြလျှင်

(က) $a < b, b < c$ ဖြစ်လျှင် $a < c$

(ခ) $a < b$ ဖြစ်လျှင် $a + c < b + c$

(ဂ) $a < b, c > 0$ ဖြစ်လျှင် $ac < bc$

(ဃ) $a < b, c < 0$ ဖြစ်လျှင် $ac > bc$

(င) $a < b$ ဖြစ်လျှင် $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}, a \neq 0, b \neq 0$ တို့ဖြစ်ကြသည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၁.၂

၁။ အောက်ပါအီရာရှင်နယ်ကိန်းများကို ကိန်းစစ်မျဉ်းပေါ်တွင်ဖော်ပြပါ။

(က) $\sqrt{13}$ (ခ) $\sqrt{17}$ (ဂ) $\sqrt{18}$

(ဃ) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (င) $1+\sqrt{2}$ (စ) $\sqrt{2}-1$

(ဆ) $-\sqrt{2}$ (ဇ) $-\sqrt{10}$ (ဈ) $\sqrt{10}-2$

၂။ 5 နှင့် 6 ကြားရှိ အီရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုကို ဖော်ပြပါ။

၃။ 1 နှင့် $\sqrt{2}$ ကြားရှိ ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုကို ဖော်ပြပါ။

၄။ 1 နှင့် $\sqrt{2}$ ကြားရှိ အီရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုကို ဖော်ပြပါ။

၅။ $\sqrt{5}$ နှင့် $\sqrt{13}$ ကြားရှိ အီရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုကို ဖော်ပြပါ။

၆။ မြှောက်လဒ်သည် ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုကိုရစေသော မတူညီသည့် အီရာရှင်နယ်ကိန်း နှစ်ခုကိုရှာပါ။

၇။ မြှောက်လဒ်သည် အီရာရှင်နယ်ကိန်းဖြစ်သော အီရာရှင်နယ်ကိန်းနှစ်ခုကိုဖော်ပြပါ။

၈။ 0 သည် ရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခု သို့မဟုတ် အီရာရှင်နယ်ကိန်းတစ်ခုဖြစ်သလား။

၉။ ပေါင်းလဒ်သည် ရာရှင်နယ်ကိန်းဖြစ်စေသော အီရာရှင်နယ်ကိန်းနှစ်ခုကိုဖော်ပြပါ။

အခန်း ၂ ထပ်ညွှန်းနှင့်ထပ်ကိန်းရင်းများ

ထပ်ကိန်းအကြောင်းနှင့်ပတ်သက်ပြီး များစွာ လေ့လာခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ရာရှင်နယ်ကိန်းများ၏ ထပ်ညွှန်းပုံစံကိန်းတို့ကို မြှောက်ခြင်း၊ စားခြင်း နှင့် နှစ်ထပ်ကိန်းရင်းရှာခြင်း စသည့်အကြောင်းတို့ကို သိရှိပြီးဖြစ်သည်။ ယခုဆက်လက်၍ အပေါင်းကိန်းစစ်များ၏ထပ်ကိန်းများကို လေ့လာကြမည်။

၂.၁ ကိန်းစစ်များ၏ ကိန်းပြည့်ထပ်ညွှန်းများ

b သည် အပေါင်းကိန်းစစ်တစ်ခု ဖြစ်ပြီး n သည် သဘာဝကိန်းတစ်ခုဖြစ်လျှင် b^n သည် b ကို n အကြိမ်မြှောက်ထားသော မြှောက်လဒ်ဖြစ်သည်။ သင်္ကေတအားဖြင့်

$$b^n = \underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{n\ \textbf{အကြိမ်မြှောက်ခြင်း}} \text{ ဟုရေးသည်။}$$

$n = 1$ ဖြစ်သည့်အခါ $b^1 = b$ ဟုရေးသည်။

ဥပမာ။ $(\sqrt{3})^1 = \sqrt{3}, \quad (-\sqrt{5})^1 = -\sqrt{5}, \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

၁။ b သည် သုညမဟုတ်သောကိန်းစစ်တစ်ခုဖြစ်လျှင် $b^0 = 1$ ဟု အဓိပ္ပာယ်သတ်မှတ်သည်။

ဥပမာ။ $(\sqrt{2})^0 = 1, \quad (-\sqrt{3})^0 = 1, \quad a^0 = 1$

၂။ b သည် သုညမဟုတ်သောကိန်းစစ်တစ်ခုဖြစ်ပြီး r သည် သဘာဝကိန်းတစ်ခုဖြစ်လျှင် $b^{-r} = \frac{1}{b^r}$ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ။ $(\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (\sqrt{2})^{-4} = \frac{1}{(\sqrt{2})^4}$

လေ့ကျင့်ခန်း ၂.၁

၁။ အောက်ပါတို့ကို အီရာရှင်နယ်ကိန်း၏ထပ်ညွှန်းပုံစံသို့ပြောင်းရေးပါ။

(က) $\sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times 2$ (ခ) $\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

(ဂ) $\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}}$ (ဃ) $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a}$

၂။ အောက်ပါတို့၏ တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

(က) $(9x^3)^0 + 9(x^3)^0$ (ခ) $(-\sqrt{2})^0 - (\sqrt{2})^0$

(ဂ) $(\sqrt{3})^{-4}$ (ဃ) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

၂.၂ ကိန်းစစ်များ၏ ရာရှင်နယ်ထပ်ညွှန်းများ

ကိန်းစစ်များ၏ ရာရှင်နယ်ထပ်ညွှန်းများအကြောင်းကို လေ့လာကြမည်။

$2^2 = 4$ ဖြစ်သောအခါ $4^{\frac{1}{2}} = 2$ ဟုရေးမည်။

ထိုနည်းတူ $3^2 = 9$ ဖြစ်သောအခါ $9^{\frac{1}{2}} = 3$ ဟုရေးမည်။

$2^3 = 8$ ဖြစ်သောအခါ $8^{\frac{1}{3}} = 2$ ဟုရေးမည်။

ယေဘုယျအားဖြင့် အောက်ပါတို့ကို ရရှိသည်။

၁။ a နှင့် b တို့သည်အပေါင်းကိန်းစစ်များဖြစ်ပြီး n သည်သဘာဝကိန်းဖြစ်လျှင်

$b^n = a$ ဖြစ်သောအခါ $a^{\frac{1}{n}} = b$ ဖြစ်သည်။

၂။ a သည်အပေါင်းကိန်းစစ်ဖြစ်၍ n သည် သဘာဝကိန်းဖြစ်ပြီး m သည် ကိန်းပြည့်ဖြစ်လျှင်

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ $(\sqrt{2})^6 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2^3 = 8$

$\therefore 8^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2}$

ဥပမာ ၂။ $27^{\frac{4}{3}}$ ၏ တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

$27^{\frac{4}{3}} = (27^{\frac{1}{3}})^4 = 3^4 = 81$

ဥပမာ ၃။ $16^{\frac{3}{4}}$ ၏ တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

$16^{\frac{3}{4}} = (16^{\frac{1}{4}})^3 = 2^3 = 8$

လေ့ကျင့်ခန်း ၂.၂

၁။ အောက်ပါတို့၏ တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

(က) $8^{\frac{2}{3}}$ (ခ) $64^{\frac{5}{6}}$ (ဂ) $25^{-\frac{3}{2}}$ (ဃ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{5}{2}}$

၂။ အောက်ပါတို့၏ တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

(က) $27^{\frac{2}{3}} + 25^{\frac{1}{2}}$ (ခ) $81^{\frac{1}{2}} - 256^{\frac{1}{4}}$ (ဂ) $125^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}}$ (ဃ) $\dfrac{4^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}}}{8^{\frac{1}{3}}}$

၂.၃ ထပ်ညွှန်းဆိုင်ရာဥပဒေသများ

b သည်အပေါင်းကိန်းစစ်ဖြစ်၍ r နှင့် s တို့သည်ရာရှင်နယ်ကိန်းများဖြစ်ကြလျှင်

၁။ $b^r \times b^s = b^{r+s}$

၂။ $\dfrac{b^r}{b^s} = b^{r-s}$

၃။ $(b^r)^s = b^{rs}$ တို့ဖြစ်ကြသည်။

ဥပမာ ၁။ အောက်ပါတို့ကိုတွက်ပါ။

(က) $(\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^3$ (ခ) $(\sqrt{7})^5 \times (\sqrt{7})^{-3}$ (ဂ) $(\sqrt{3})^{-\frac{3}{2}} \times (\sqrt{3})^{-\frac{5}{2}}$

(က) $(\sqrt{3})^4 \times (\sqrt{3})^3 = (\sqrt{3})^7$

(ခ) $(\sqrt{7})^5 \times (\sqrt{7})^{-3} = (\sqrt{7})^{5-3} = (\sqrt{7})^2 = 7$

(ဂ) $(\sqrt{3})^{-\frac{3}{2}} \times (\sqrt{3})^{-\frac{5}{2}} = (\sqrt{3})^{-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}} = (\sqrt{3})^{-\frac{8}{2}} = (\sqrt{3})^{-4}$

$= \dfrac{1}{(\sqrt{3})^4} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$

ဥပမာ ၂။ အောက်ပါတို့ကိုတွက်ပါ။

(က) $\left[(\sqrt{5})^{\frac{2}{3}}\right]^6$ (ခ) $(4^{\frac{1}{3}})^{-\frac{3}{2}}$

(က) $\left[(\sqrt{5})^{\frac{2}{3}}\right]^6 = (\sqrt{5})^{\frac{2}{3}\times 6} = (\sqrt{5})^4 = 25$

(ခ) $(4^{\frac{1}{3}})^{-\frac{3}{2}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{2}$

ဥပမာ ၃။ $[(\sqrt{2})^3]^{\frac{5}{2}} = (\sqrt{2})^{2a+1}$ ဖြစ်လျှင် a ၏တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

$$\begin{aligned} [(\sqrt{2})^3]^{\frac{5}{2}} &= (\sqrt{2})^{2a+1} \\ 2a+1 &= \frac{15}{2} \\ 2a &= \frac{15}{2} - 1 = \frac{13}{2} \\ a &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၂.၃

၁။ a နှင့် b တို့သည်အပေါင်းကိန်းများဖြစ်လျှင် အောက်ပါတို့ကို အပေါင်းထပ်ညွှန်းရသည် အထိရှင်းပါ။

(က) $\dfrac{3^{-2}a^{-2}b^{-3}}{3^{-5}a^{-4}b^{-1}}$ (ခ) $\left[\dfrac{a^5}{a^{-3}}\right]^{-4}$ (ဂ) $\left[\dfrac{a^0 b^{-2} a^{-3} a}{a^{-4} b^{-1}}\right]^{-3}$

(ဃ) $\left[\dfrac{a^{\frac{-3}{2}}}{a^{\frac{-2}{5}}}\right]^{-5}$ (င) $\left[\dfrac{4a^{-3} b^2 a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2}a^5 b^{-4}}\right]^3$

၂။ အောက်ဖော်ပြပါတို့တွင် မည်သည်တို့သည် မှန်သနည်း။

(က) $(\sqrt{2})^2 \times 2^3 = (\sqrt{2})^{2+6}$ (ခ) $(\sqrt{2})^2 \times 2^3 = (\sqrt{2})^{2+3}$

(ဂ) $(\sqrt{5})^3 \times \sqrt{25} = (\sqrt{5})^{3+1}$ (ဃ) $(\sqrt{5})^3 \times \sqrt{25} = (\sqrt{5})^{3+2}$

(င) $(\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^0 = (\sqrt{2})^{4+0}$ (စ) $(\sqrt{2})^4 + (\sqrt{2})^0 = (\sqrt{2})^4 + 1$

၃။ အောက်ပါတို့တွင် k ၏တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

(က) $(\sqrt{2})^6 \div (\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^{k-1}$ (ခ) $(\sqrt{3})^5 \div (\sqrt{3})^{-4} = (\sqrt{3})^{2k+1}$

(ဂ) $(\sqrt{5})^{2k} \times (\sqrt{5})^{-2} = 25$ (ဃ) $(\sqrt{2})^{-3k} \times (\sqrt{2})^9 = 1$

(င) $(\sqrt{3})^{k^2} \times 3 = (\sqrt{3})^{3k}$

၄။ a သည်အပေါင်းကိန်းတစ်ခုဖြစ်လျှင် အောက်ပါတို့တွင် မည်သည်တို့သည်မှန်သနည်း။ အဘယ်ကြောင့်နည်း။

(က) $(a^2 \times a^{-1})^2 = a^3$ (ခ) $(a^4 \times a^{-1})^2 = a^6$ (ဂ) $(a^0 \times a^5)^2 = 0$

(ဃ) $(\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2})^{-5} = \frac{1}{2}$ (င) $((\sqrt{3})^3 \times (\sqrt{3})^{-7})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

၅။ အောက်ပါတို့ကိုရှင်းပါ။ အဖြေကို အပေါင်းထပ်ညွှန်းပုံစံဖြင့်ပြပါ။

(က) $\{(\sqrt{2})^3 \times (\sqrt{2})^{-5}\}^6$ (ခ) $\{(\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^{-1}\}^5$

(ဂ) $\{(\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^2\}^{-3}$ (ဃ) $\left\{\frac{(\sqrt{5})^6 \times (\sqrt{5})^{-3}}{(\sqrt{5})^{-2}}\right\}^{\frac{1}{3}}$

၆။ အောက်ပါတို့တွင် a ၏တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

(က) $3 \times (\sqrt{3})^a \times (\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = 3 \times \sqrt{3}$ (ခ) $2 \times (\sqrt{2})^5 \times (\sqrt{2})^{-\frac{2}{3}} = (\sqrt{2})^{a+1}$

၂.၄ ထပ်ကိန်းရင်းများကိုရှင်းနည်း

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ ကို 2 ၏နှစ်ထပ်ကိန်းရင်းဟုလည်းကောင်း၊ $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ ကို 3 ၏ နှစ်ထပ် ကိန်းရင်းဟုလည်းကောင်း ခေါ်ဆိုကြောင်းသိရှိပြီးဖြစ်သည်။ $8^{\frac{1}{3}} = 2$ မှ 2 သည် 8 ၏သုံးထပ် ကိန်းရင်းဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရသည်။ ထိုနည်းအတိုင်းပင် $(81)^{\frac{1}{4}} = 3$ မှ 3 သည် 81 ၏ လေးထပ်ကိန်းရင်းဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရသည်။

ယေဘုယျအားဖြင့် အောက်ပါအဓိပ္ပာယ်သတ်မှတ်ချက်ကို ရရှိသည်။

a သည် အပေါင်းကိန်းစစ်တစ်ခုဖြစ်ပြီး n သည်သဘာဝကိန်းတစ်ခုဖြစ်လျှင် အပေါင်းကိန်းစစ် $a^{\frac{1}{n}}$ ကို a ၏ n ထပ်ကိန်းရင်း (n^{th} root of a) ဟုခေါ်သည်။

$a^{\frac{1}{n}}$ ကို $\sqrt[n]{a}$ ဟုရေးသည်။ $\sqrt[n]{\ }$ ကို **ထပ်ကိန်းရင်းသင်္ကေတ** (radical sign) ဟု ခေါ်သည်။ n ကို **ထပ်ကိန်းရင်းအဆင့်** (order or index) ဟုခေါ်ပြီး a ကို **ထပ်ကိန်းရင်းအပြုခံကိန်း** (radicand) ဟုခေါ်သည်။

မှတ်ချက် ။ **$n = 1$ ဖြစ်လျှင် $\sqrt[n]{a} = a$ ဟုရေးပြီး**
$n = 2$ ဖြစ်လျှင် $\sqrt[n]{a}$ ကို $\sqrt{a}$ ဟုရေးမည်။

အဆင့်တူသော ထပ်ကိန်းရင်းနှစ်ခု၏ မြှောက်ခြင်း၊ စားခြင်း ဆိုင်ရာဥပဒေသများကို အောက်ပါအတိုင်းတွေ့ရှိနိုင်သည်။

a နှင့် b တို့သည်အပေါင်းကိန်းစစ် n သည်သဘာဝကိန်းအသီးသီးဖြစ်လျှင်

၁။ $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

၂။ $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ $\sqrt{3}\times\sqrt{48}$ ကိုရှင်းပါ။

$$\sqrt{3}\times\sqrt{48} = \sqrt{3\times48} = \sqrt{144} = 12$$

ဥပမာ ၂။ $\sqrt[5]{4}\times\sqrt[5]{8}$ ကိုရှင်းပါ။

$$\sqrt[5]{4}\times\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{4\times8} = \sqrt[5]{32} = (32)^{\frac{1}{5}} = 2$$

ဥပမာ ၃။ $\sqrt[3]{32}\div\sqrt[3]{2}$ ကိုရှင်းပါ။

$$\sqrt[3]{32}\div\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{\frac{32}{2}} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8\times2} = \sqrt[3]{2^3\times2} = 2\sqrt[3]{2}$$

ဥပမာ ၄။ $\sqrt{\dfrac{14\times35}{10}}$ ကိုရှင်းပါ။

$$\sqrt{\frac{14\times35}{10}} = \sqrt{49} = 7$$

ဥပမာ ၅။ a နှင့် b တို့သည် အပေါင်းကိန်းစစ်များဖြစ်လျှင် $\dfrac{\sqrt[3]{128a^3b}\times\sqrt[3]{250a^{-2}b^{-4}}}{\sqrt[3]{12a^{-7}b^4}}$ ကိုရှင်းပါ။

$$\frac{\sqrt[3]{128a^3b}\times\sqrt[3]{250a^{-2}b^{-4}}}{\sqrt[3]{12a^{-7}b^4}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{128a^3b\times250a^{-2}b^{-4}}{12a^{-7}b^4}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{32\times250ab^{-3}}{3a^{-7}b^4}} = \sqrt[3]{\frac{2^5\times2\times125a^8}{3b^7}} = \sqrt[3]{\frac{2^6\times5^3\times a^6\times a^2}{3b^6\times b}}$$

$$= \frac{4\times5a^2}{b^2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{3b}} = \frac{20a^2}{b^2}\sqrt[3]{\frac{a^2}{3b}}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၂.၄

၁။ အောက်ပါတို့ကို ရှင်းပါ။

(က) $\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{20}}$　(ခ) $\sqrt{11}(\sqrt{11}-\sqrt{44})$　(ဂ) $\dfrac{\sqrt{98}\times\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

(ဃ) $\dfrac{3\sqrt{28}+4\sqrt{63}}{3\sqrt{7}}$　(င) $\dfrac{\sqrt{75}\times\sqrt{60}\times\sqrt{63}}{\sqrt{200}}$　(စ) $\dfrac{\sqrt{98}\times\sqrt{12}\times\sqrt{27}}{\sqrt{49}\times\sqrt{32}}$

(ဆ) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　(ဇ) $2-\dfrac{1}{4}\sqrt{48}$

၂။ a နှင့် b တို့သည်အပေါင်းကိန်းများဖြစ်လျှင် အောက်ပါတို့ကို ရှင်းပါ။

(က) $\dfrac{1}{\sqrt{ab}}\times\sqrt{a^5b^2}$　(ခ) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b^3}}\times\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{b^{-1}a^{-1}}}\times\sqrt{\dfrac{a}{b}}\times\sqrt{\dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}}$

(ဂ) $\left\{\sqrt[3]{a^2b}\times\dfrac{1}{\sqrt[3]{ab^2}}\right\}^{-3}$　(ဃ) $\{(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\div(\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b})\}^6$

(င) $\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{2b}}{\sqrt{b}}$　(စ) $\sqrt{3a}\,(\sqrt{3a}+\sqrt{27a^3})$

(ဆ) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$　(ဇ) $\dfrac{\sqrt{9a^2b^{-1}}\times\sqrt{2^{-1}a^{-1}b^2}}{\sqrt{2a^3b^3}}$

(ဈ) $\left(\dfrac{\sqrt{250a^3}}{\sqrt{98b^3}}\right)\times\left(\dfrac{7\sqrt{b}}{\sqrt{125a}}\right)$　(ည) $\dfrac{\sqrt{64b}+4\sqrt{b}}{\sqrt{128b}}$

အခန်း ၃ အက္ခရာကိန်းတန်းများ

ရာရှင်နယ်မြှောက်ဖော်ကိန်းများဖြင့် ဖွဲ့စည်းထားသောကိန်းတန်းများကိုသာ ယခင်က လေ့လာခဲ့သည်။ ဤအခန်းတွင်ရာရှင်နယ်ကိန်းများသာမက အီရာရှင်နယ်ကိန်းများ ပါဝင်သည့် ပို၍ ယေဘုယျကျသော ကိန်းစစ်မြှောက်ဖော်ကိန်းများဖြင့် ဖွဲ့စည်းထားသည့် ကိန်းတန်းများကို ဆက်လက်၍ လေ့လာမည်။ ထို့ပြင် ကိန်းရှင်တစ်ခုသာပါသည့် ကိန်းတန်းနှစ်ခုကို အခြေခံသင်္ချာ လုပ်ထုံးများသုံးပြီး လေ့လာကြမည်။

၃.၁ ပြန်လည်သတိပြုရန်အချက်များ

ရာရှင်နယ်မြှောက်ဖော်ကိန်းများပါဝင်သော အက္ခရာကိန်းတန်းများအကြောင်း လေ့လာခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ အထူးသဖြင့် ကိန်းရှင်တစ်ခုပါသော ပိုလီနိုမီယယ်များပေါင်းခြင်း၊ နုတ်ခြင်းကို လေ့လာခဲ့သည်။

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

ကဲ့သို့သောကိန်းရှင် x တစ်ခုပါ အက္ခရာကိန်းတန်းတစ်ခုကို ပိုလီနိုမီယယ် (polynomial) ဟုခေါ်သည်။ ယင်းတွင် x ၏ ထပ်ညွှန်းများသည် အနုတ်မဟုတ်သည့် ကိန်းပြည့်များဖြစ်ပြီး မြှောက်ဖော်ကိန်း $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ တို့သည် ကိန်းစစ်များဖြစ်သည်။

ဤတွင် အရေအတွက် (n + 1) ရှိသော မြှောက်ဖော်ကိန်းတို့ကို သင်္ကေတ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ဖြင့်ဖော်ပြလေ့ရှိသည်။ အထက်တွင်ဖော်ပြထားသည့် ပိုလီနိုမီယယ်တွင် ပါရှိသည့် ကိန်းလုံးတိုင်း၌ x ၏ ထပ်ညွှန်းသည် a ၏ အောက်ညွှန်း (suffix)နှင့် တူညီသည်ကို တွေ့နိုင်သည်။ ဤတွင် a_0 ကို a_0x^0 ဟု ရေးနိုင်ကြောင်း သတိပြုပါ။

ကိန်းလုံးတစ်ခုတည်းပါသော မိုနိုမီယယ် (monomial)တစ်ခု၏ အဆင့်ကို ထိုမိုနိုမီယယ်တွင် ပါဝင်သည့် x ၏ ထပ်ညွှန်းဖြင့် သတ်မှတ်သည်။ ပိုလီနိုမီယယ်တစ်ခု၏အဆင့်ကိုမူ ထိုကိန်းတန်းတွင်ပါဝင်သည့်ကိန်းလုံးများ (terms)၏ ထပ်ညွှန်းတို့မှ အကြီးဆုံးထပ်ညွှန်းတို့ဖြင့် သတ်မှတ်သည်။

သို့ဖြစ်၍ မိုနိုမီယယ် $\frac{5}{2}x^3$ ၏ အဆင့်သည် 3 ဖြစ်ပြီး ပိုလီနိုမီယယ် $\frac{2}{9}x - \frac{5}{3}x^5 + \frac{2}{7}x^2$ ၏ အဆင့်သည် 5 ဖြစ်၏။

ပြီးခဲ့သော သင်ခန်းစာများတွင် ရာရှင်နယ်မြှောက်ဖော်ကိန်းများ ပါဝင်သော ပိုလီနိုမီယယ်များပေါင်းခြင်း သို့မဟုတ် နုတ်ခြင်းတို့ကို လေ့လာခဲ့ရာတွင်ထပ်ညွှန်းတူသော ကိန်းလုံးများကို အတူတကွ စုပေါင်းထားရှိပြီး ပေါင်းခြင်း သို့မဟုတ် နုတ်ခြင်းတို့ကို ပြုလုပ်ရသည်။

ဥပမာ။ $(\frac{8}{9}x^2-\frac{2}{5}x^4+\frac{3}{7}x^5)-(\frac{1}{9}x+\frac{2}{9}x^2-\frac{3}{9}x^4+\frac{4}{9}x^5)$

$= \frac{8}{9}x^2-\frac{2}{5}x^4+\frac{3}{7}x^5-\frac{1}{9}x-\frac{2}{9}x^2+\frac{3}{9}x^4-\frac{4}{9}x^5$

$= -\frac{1}{9}x+(\frac{8}{9}x^2-\frac{2}{9}x^2)-(\frac{2}{5}x^4-\frac{3}{9}x^4)+(\frac{3}{7}x^5-\frac{4}{9}x^5)$

$= -\frac{1}{9}x+\frac{6}{9}x^2-\frac{3}{45}x^4-\frac{1}{63}x^5$

$= -\frac{1}{9}x+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{15}x^4-\frac{1}{63}x^5$

လေ့ကျင့်ခန်း ၃.၁

၁။ အောက်ပါ ပိုလီနိုမီယယ်များ၏ အဆင့်ကို ဖော်ပြပါ။

(က) $\frac{1}{3}x^9-\frac{2}{7}x^4+\frac{17}{19}x$ (ခ) $\frac{8}{11}x^2-\frac{13}{17}x^5+\frac{9}{13}x^{11}+\frac{12}{19}x^{25}$

(ဂ) $\frac{-3}{8}y-\frac{5}{6}y^3+\frac{8}{15}y^4$

၂။ အောက်ပါမိုနိုမီယယ်များကို ၎င်းတို့၏ အဆင့်အလိုက် ကြီးစဉ်ငယ်လိုက်စဉ်ပေးပါ။

$-\frac{8}{9}x,\ \frac{2}{11}x^2,\ \frac{99}{100}x^7,\ \frac{101}{10}x^5$

၃။ ပေးထားသော ပိုလီနိုမီယယ်နှစ်ခုကို ပေါင်းပါ။

(က) $\frac{2}{7}y^3-\frac{1}{7}y^2+\frac{6}{7}y,\quad \frac{7}{8}y-\frac{5}{4}y^2-\frac{3}{2}y^3$

(ခ) $6+\frac{5}{6}z+\frac{2}{5}z^2-\frac{80}{9}z^3,\quad \frac{3}{5}z^2+\frac{10}{11}z^3+\frac{100}{3}z^5$

၄။ ပိုလီနိုမီယယ် $\frac{83}{7}y+\frac{18}{5}y^2-\frac{6}{7}y^3$ ကို ပိုလီနိုမီယယ် $\frac{6}{5}y^2+\frac{1}{7}y^3-\frac{2}{7}y^5$ မှ နုတ်ပါ။

၅။ ပိုလီနိုမီယယ် $3x^2-7x+7$ ရရန် ပိုလီနိုမီယယ် $7x^2-5x+6$ တွင် မည်သည့် ပိုလီနိုမီယယ် ပေါင်းရမည်နည်း။

၆။ ပိုလီနိုမီယယ် $10x^2-3x+8$ ရရန် ပိုလီနိုမီယယ် $8x^2-2x+5$ မှ မည်သည့် ပိုလီနိုမီယယ် နုတ်ရမည်နည်း။

၃.၂ ကိန်းစစ်မြှောက်ဖော်ကိန်းများဖြင့်ဖော်ပြသောပိုလီနိုမီယယ်များပေါင်းခြင်း၊ နုတ်ခြင်း

ဤအခန်းတွင်ရာရှင်နယ်ကိန်းများအပြင် အီရာရှင်နယ်ကိန်းများပါဝင်သော မြှောက်ဖော် ကိန်းများကို ကိန်းစစ်များဖြစ်သည်ဟုထားမည်။ ကိန်းစစ်မြှောက်ဖော်ကိန်းပါဝင်သောပိုလီနိုမီယယ် များပေါင်းခြင်း၊ နုတ်ခြင်းဆိုင်ရာဥပဒေသသည် ရာရှင်နယ်မြှောက်ဖော်ကိန်းများပါဝင်သော ပိုလီနိုမီယယ် အတွက် သတ်မှတ်ခဲ့သောဥပဒေနှင့် တူညီသည်။ ဥပမာ $\sqrt{2}x$ သည် မြှောက်ဖော်ကိန်း $\sqrt{2}$ ပါရှိသော မိုနိုမီယယ် ဖြစ်သည်။ ၎င်းကို အခြားမိုနိုမီယယ်ဖြစ်သော $3x$ တွင် ပေါင်းလျှင်

$$\sqrt{2}x+3x = (\sqrt{2}+3)x$$

ဖြစ်သည်။ ဤတွင် x ၏ မြှောက်ဖော်ကိန်းသည် $(\sqrt{2}+3)$ ဖြစ်သည်။ ကိန်းစစ်မြှောက်ဖော် ကိန်းများရှိသော ပိုလီနိုမီယယ်များ ပေါင်းခြင်း၊ နုတ်ခြင်းဆိုင်ရာ ဥပမာအချို့ကို ဆက်လက် လေ့လာကြပါမည်။

ဥပမာ ၁။ ပိုလီနိုမီယယ် $\frac{1}{3}x+\sqrt{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3$ နှင့် $\frac{2}{3}x-\sqrt{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3$ တို့ကိုပေါင်းပါ။

$$\begin{aligned}
&(\frac{1}{3}x+\sqrt{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3)+(\frac{2}{3}x-\sqrt{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3)\\
=\ &(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}x)+(\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}x^2)+(\frac{-1}{\sqrt{3}}x^3-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3)\\
=\ &(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})x+(\sqrt{2}-\sqrt{2})x^2+(\frac{-1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}})x^3 = x-\frac{2}{\sqrt{3}}x^3
\end{aligned}$$

ဥပမာ ၂။ ပိုလီနိုမီယယ် $\frac{2}{3}x-\sqrt{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3$ မှ $\frac{1}{3}x+\sqrt{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3$ ကိုနုတ်ပါ။

$$\begin{aligned}
&(\frac{2}{3}x-\sqrt{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3)-(\frac{1}{3}x+\sqrt{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3)\\
=\ &\frac{2}{3}x-\sqrt{2}x^2-\frac{1}{\sqrt{3}}x^3-\frac{1}{3}x-\sqrt{2}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x^3\\
=\ &(\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x)+(-\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}x^2)+(\frac{-1}{\sqrt{3}}x^3+\frac{1}{\sqrt{3}}x^3)\\
=\ &(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})x+(-\sqrt{2}-\sqrt{2})x^2+(\frac{-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}})x^3\\
=\ &\frac{1}{3}x-2\sqrt{2}x^2
\end{aligned}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၃.၂

၁။ အောက်ပါ မိုနိုမီယယ်များကို ၎င်းတို့၏ အဆင့်အလိုက် ကြီးစဉ်ငယ်လိုက်စီစဉ်ပေးပါ။

$\sqrt{2}x^5,\ -\frac{1}{3}x^4,\ \frac{3}{17}x^{11},\ \frac{6}{1.5}x^7$

၂။ အောက်ပါ ပိုလီနိုမီယယ်အတွဲများကို ပေါင်းပါ။

(က) $\frac{6}{5}x-\frac{2}{\sqrt{7}}x^2+\frac{1}{3}x^3,\ \sqrt{5}+\frac{1}{3}x^2-1.2x^3$

(ခ) $\frac{-1}{7}y+\frac{2}{\sqrt{7}}y^2+\sqrt{11}y^4,\ 8-y^{11}-\frac{-1}{\sqrt{7}}y^2$

၃.၃ ပိုလီနိုမီယယ်များမြှောက်ခြင်း

၃.၃.၁ မိုနိုမီယယ်နှစ်ခု၏ မြှောက်လဒ်

ကိန်းစစ်မြှောက်ဖော်ကိန်း a နှင့် b တို့ပါရှိသော မိုနိုမီယယ် ax^m နှင့် bx^n မြှောက်လဒ်ကို အောက်ပါအတိုင်း ဖော်ပြသည်။

$$\boxed{ax^m \times bx^n = (a\times b)x^{m+n}}$$

ဥပမာ ၁။ $2x^3$ နှင့် $\frac{1}{3}x^7$ တို့ကို မြှောက်ပါ။

$$(2x^3)\times(\frac{1}{3}x^7) = (2\times\frac{1}{3})x^{3+7} = \frac{2}{3}x^{10}$$

ဥပမာ ၂။ $\frac{-1}{\sqrt{7}}x^5$ နှင့် $\frac{10}{11}x^{13}$ တို့ကို မြှောက်ပါ။

$$(\frac{-1}{\sqrt{7}}x^5)\times(\frac{10}{11}x^{13}) = (\frac{-1}{\sqrt{7}}\times\frac{10}{11})x^{5+13} = \frac{-10}{11\sqrt{7}}x^{18}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၃.၃

အောက်ပါတို့ကို ရှင်းပါ။

၁။ $(\frac{1}{2}x^4)\times(\frac{3}{4}x^4)$

၂။ $\frac{\sqrt{3}}{7}\times(\frac{\sqrt{5}}{6}x^8)$

၃။ $(\frac{-1}{\sqrt{6}}x)\times(\frac{1}{7}x^6)$

၄။ $(\frac{\sqrt{10}}{11}x^{11})\times(\frac{9}{\sqrt{10}}x^4)$

၅။ $(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}})x^{10}\times(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}})x^2$

၆။ $(4+\sqrt{2})x^6\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x^2$

G-9_Math F2(B)

၃.၃.၂ ပိုလီနိုမီယယ်တစ်ခုနှင့်မိုနိုမီယယ်တစ်ခုတို့၏ မြှောက်လဒ်

ယခုဆက်လက်၍ ပိုလီနိုမီယယ်တစ်ခုနှင့် မိုနိုမီယယ်တစ်ခု မည်သို့မြှောက်ရသည်ကို လေ့လာကြမည်။

ax^n သည် မိုနိုမီယယ်တစ်ခုဖြစ်ပြီး $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m$ သည် ပိုလီနိုမီယယ်တစ်ခုဖြစ်ပါစေ။ ဤတွင် မြှောက်ဖော်ကိန်း a , a_0, a_1, a_2, a_3, …, a_m တို့သည် ကိန်းစစ်များဖြစ်ပါစေ။

ကိန်းစစ်များမြှောက်ခြင်းသည် ဖြန့်ဝေရဂုဏ်သတ္တိကို ပြေလည်သကဲ့သို့ ပိုလီနိုမီယယ်များ မြှောက်ခြင်းသည်လည်း ဖြန့်ဝေရဂုဏ်သတ္တိကို ပြေလည်သည်။

ထို့ကြောင့်

$$\begin{aligned}
&ax^n \times (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m)\\
&= (ax^n)\times a_0 + (ax^n)\times(a_1x) + (ax^n)\times(a_2x^2) + \dots + (ax^n)\times(a_mx^m)\\
&= (a\times a_0)\,x^n + (a\times a_1)x^{n+1} + (a\times a_2)\,x^{n+2} + \dots + (a\times a_m)\,x^{n+m}\\
&= (aa_0)\,x^n + (aa_1)\,x^{n+1} + (aa_2)\,x^{n+2} + \dots + (aa_m)\,x^{n+m}
\end{aligned}$$

ဥပမာ ၁။ $4x$ နှင့် $\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}$ တို့ကို မြှောက်ပါ။

$$\begin{aligned}
(4x)\times(\tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{4}) &= (4x)\times(\tfrac{3}{2}x^2) + (4x)\times(\tfrac{3}{4})\\
&= (4\times\tfrac{3}{2})x^{1+2} + (4\times\tfrac{3}{4})x\\
&= 6x^3 + 3x
\end{aligned}$$

ဥပမာ ၂။ $\frac{1}{\sqrt{2}}x^3$ နှင့် $3x^2 + 4x$ တို့ကို မြှောက်ပါ။

$$\begin{aligned}
(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x^3)\times(3x^2+4x) &= (\tfrac{1}{\sqrt{2}}x^3)\times(3x^2) + (\tfrac{1}{\sqrt{2}}x^3)\times(4x)\\
&= (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\times 3)x^{3+2} + (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\times 4)x^{3+1}\\
&= \frac{3}{\sqrt{2}}x^5 + 2\sqrt{2}x^4 = \frac{3\sqrt{2}}{2}x^5 + 2\sqrt{2}x^4
\end{aligned}$$

ဥပမာ ၃။ $(-\frac{1}{\sqrt{3}}x^2)\times(\frac{2}{3}x^3+7x)$ ကိုရှင်းပါ။

$$(-\frac{1}{\sqrt{3}}x^2)\times(\frac{2}{3}x^3+7x) = (-\frac{1}{\sqrt{3}}x^2)\times(\frac{2}{3}x^3)+(-\frac{1}{\sqrt{3}}x^2)\times(7x)$$

$$= -\frac{2}{3\sqrt{3}}x^5-\frac{7}{\sqrt{3}}x^3 = \frac{-2\sqrt{3}}{9}x^5-\frac{7\sqrt{3}}{3}x^3$$

ဥပမာ ၄။ $(-\frac{\sqrt{2}}{3}x^2) \times (x^4-\frac{x^3}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}x^2-22)$ ကိုရှင်းပါ။

$$(-\frac{\sqrt{2}}{3}x^2) \times (x^4-\frac{x^3}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{3}}x^2-22)$$

$$= (-\frac{\sqrt{2}}{3}x^2)\times(x^4)+(-\frac{\sqrt{2}}{3}x^2)\times(-\frac{x^3}{\sqrt{2}})$$

$$+(-\frac{\sqrt{2}}{3}x^2)\times(\frac{2}{\sqrt{3}}x^2)+(-\frac{\sqrt{2}}{3}x^2)\times(-22)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{3}x^6+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}x^5-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}x^4+\frac{22\sqrt{2}}{3}x^2$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{3}x^6+\frac{x^5}{3}-\frac{2\sqrt{6}}{9}x^4+\frac{22\sqrt{2}}{3}x^2$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၃.၄

အောက်ပါတို့ကိုရှင်းပါ။

၁။ $(\sqrt{2}x)\times(\frac{1}{2}x^2+4x)$

၂။ $(\frac{3}{8}x^2)\times(4x^2+\frac{2}{\sqrt{3}}x)$

၃။ $(\frac{1}{6}x^5) \times (x^3+\frac{\sqrt{8}}{11})$

၄။ $(-\frac{10}{11}x) \times (\frac{3}{2}x^3+\frac{7}{6})$

၅။ $(-\sqrt{3}x^2)\times(-x^2+\frac{\sqrt{5}}{2}x)$

၆။ $(-\frac{11}{2\sqrt{2}}x) \times (-x^4+\frac{1}{\sqrt{2}}x^3-\frac{\sqrt{3}}{7}x^2+\frac{2}{5}x-\frac{21}{8})$

၃.၃.၃ ပိုလီနိုမီယယ်နှစ်ခုတို့၏ မြှောက်လဒ်

ဆက်လက်၍ ကိန်းစစ်မြှောက်ဖော်ကိန်းများပါဝင်သော ပိုလီနိုမီယယ်နှစ်ခု မြှောက်နည်းကို လေ့လာကြမည်။ ကိန်းစစ်မြှောက်ဖော်ကိန်းများပါရှိသော ပိုလီနိုမီယယ်နှစ်ခု P နှင့် Q ကို ပေးထားသည်ဆိုပါစို့။ P သည် ပိုလီနိုမီယယ်တစ်ခုဖြစ်သည့်အလျောက် မိုနိုမီယယ်များပေါင်းလဒ်ဖြစ်သည်။ ထိုမိုနိုမီယယ်တစ်ခုစီဖြင့် ပိုလီနိုမီယယ် Q ကို မြှောက်နိုင်သည်။ ဤသို့ ရရှိသော မြှောက်လဒ်များကို ပေါင်း၍ ရရှိသော ပိုလီနိုမီယယ်သည် P နှင့် Q တို့၏ မြှောက်လဒ်ပင် ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ $2x + 3$ နှင့် $7x - 4$ တို့ကို မြှောက်ပါ။

$$\begin{aligned}
&(2x + 3) \times (7x - 4)\\
&= (2x) \times (7x - 4) + 3 \times (7x - 4)\\
&= 2x \times 7x + (2x) \times (-4) + 3 \times (7x) + 3 \times (-4)\\
&= 14x^2 - 8x + 21x - 12\\
&= 14x^2 + 13x - 12
\end{aligned}$$

ဥပမာ ၂။ $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 1$ ကို $\frac{4}{5}x^4 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}$ ဖြင့် မြှောက်ပါ။

$$\begin{aligned}
&(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x + 1) \times (\tfrac{4}{5}x^4 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{9})\\
&= \tfrac{1}{2}x^2(\tfrac{4}{5}x^4 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{9}) + \tfrac{1}{3}x(\tfrac{4}{5}x^4 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{9}) + 1(\tfrac{4}{5}x^4 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{9})\\
&= (\tfrac{1}{2}x^2)\times(\tfrac{4}{5}x^4) + (\tfrac{1}{2}x^2)\times(-\tfrac{2}{3}x) + (\tfrac{1}{2}x^2)\times(\tfrac{2}{9}) + (\tfrac{1}{3}x)\times(\tfrac{4}{5}x^4)\\
&\quad (\tfrac{1}{3}x)\times(-\tfrac{2}{3}x) + (\tfrac{1}{3}x)\times(\tfrac{2}{9}) + 1\times(\tfrac{4}{5}x^4) + 1\times(-\tfrac{2}{3}x) + 1\times\tfrac{2}{9}\\
&= \frac{4}{10}x^6 - \frac{2}{6}x^3 + \frac{2}{18}x^2 + \frac{4}{15}x^5 - \frac{2}{9}x^2 + \frac{2}{27}x + \frac{4}{5}x^4 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\\
&= \frac{2}{5}x^6 + \frac{4}{15}x^5 + \frac{4}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{16}{27}x + \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

ဥပမာ ၃။ $6 - \sqrt{5}y$ ကို $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}y - y^2$ ဖြင့် မြှောက်ပါ။

$$\begin{aligned}
&(6 - \sqrt{5}y)\times(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}y - y^2)\\
&= 6\times(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}y - y^2) + (-\sqrt{5}y)\times(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}y - y^2)\\
&= 6\sqrt{2} + \frac{6}{\sqrt{3}}y - 6y^2 - \sqrt{5}\sqrt{2}y - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}y^2 + \sqrt{5}y^3
\end{aligned}$$

$$= 6\sqrt{2}+2\sqrt{3}y-6y^2-\sqrt{10}y-\frac{\sqrt{15}}{3}y^2+\sqrt{5}y^3$$

$$= 6\sqrt{2}+(2\sqrt{3}-\sqrt{10})y-(6+\frac{\sqrt{15}}{3})y^2+\sqrt{5}y^3$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၃.၅

အောက်ပါတို့ကိုရှင်းပါ။

၁။ $(x+a)\times(x+1)$

၂။ $(\frac{1}{\sqrt{2}}x^2+x)\times(\frac{1}{3}x+1)$

၃။ $(x-1)\times(x^2+x+1)+(2.5x^2+1.7x-1)$

၄။ $(x+\frac{2}{3})\times(x-\sqrt{5})-(8x+\frac{1}{\sqrt{11}}x^2)$

၅။ $(\frac{3}{4}x-\frac{13}{18})\times(\frac{3}{4}x+\frac{13}{18})+(\frac{7}{8}x^2+\frac{3}{4}x)\times(\frac{7}{8}x-\frac{3}{4})$

၆။ $(\frac{1}{3}z^2+z+1)\times(z^2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{9})$

၇။ $(\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}z-z^2)\times(\frac{1}{\sqrt{2}}+z)$

၃.၄ ပိုလီနိုမီယယ်များစားခြင်း

ဥပမာ ၁။ ပိုလီနိုမီယယ် $x^2+7x+12$ ကို $x+4$ ဖြင့် စားပါ။

သဘာဝကိန်းများအတွက် အသုံးပြုခဲ့သော အရှည်စားနည်းဖြင့် အောက်ပါအတိုင်း ဖော်ပြနိုင်သည်။

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x+4 & x^2+7x+12 \\ & \underline{x^2+4x} \\ & \quad\;\; 3x+12 \\ & \quad\;\; \underline{3x+12} \\ & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

$\therefore$ စားလဒ် $= x+3$

အကြွင်း $= 0$

ဉပမာ ၂။ ပိုလီနိုမီယယ် $y^5-2y^4+4y^3-y^2-2y+6$ ကို y^3-y^2+2 ဖြင့် စားပါ။

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^2 - y + 3 \\
\hline
y^3-y^2+2 & y^5-2y^4+4y^3-y^2-2y+6 \\
 & y^5-y^4+2y^2 \\
\hline
 & -y^4+4y^3-3y^2-2y+6 \\
 & -y^4+y^3-2y \\
\hline
 & 3y^3-3y^2+6 \\
 & 3y^3-3y^2+6 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

စားလဒ်သည် y^2-y+3 ဖြစ်၏။

$\therefore (y^5-2y^4+4y^3-y^2-2y+6)\div(y^3-y^2+2) = y^2-y+3$

အထက်ပါ ဉပမာများတွင် အကြွင်းမရှိစားနိုင်သည့် အခြေအနေတို့ကိုသာ တွေ့ရသည်။ တည်ကိန်းကို စားကိန်းဖြင့် အတိအကျစား၍ ပြတ်သည်ဟုခေါ်သည်။ ဤသို့ အပြတ်စားပုစ္ဆာမျိုးကို အမြဲတွေ့ရမည် မဟုတ်ပေ။

ဉပမာ ၃။ $x^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6}$ ကို $(x+\sqrt{2})$ ဖြင့် စားပါ။

$$
\begin{array}{r|l}
 & x - \sqrt{3} \\
\hline
(x+\sqrt{2}) & x^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})x-\sqrt{6} \\
 & x^2+\sqrt{2}x \\
\hline
 & -\sqrt{3}x-\sqrt{6} \\
 & -\sqrt{3}x-\sqrt{6} \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore$ စားလဒ် $= x-\sqrt{3}$

အကြွင်း $= 0$

ဉပမာ ၄။ $5y^3+7y-6$ ကို y^2+y+1 ဖြင့် စား၍ရရှိသော စားလဒ်နှင့် အကြွင်းတို့ကို ရှာပါ။

$$
\begin{array}{r|l|l}
y^2+y+1 & 5y^3+7y-6 & 5y-5 \\
 & 5y^3+5y^2+5y & \\
\hline
 & -5y^2+2y-6 & \\
 & -5y^2-5y-5 & \\
\hline
 & 7y-1 &
\end{array}
$$

စားလဒ်သည် $5y-5$ ဖြစ်ပြီး အကြွင်းသည် $7y-1$ ဖြစ်သည်။

မှတ်ချက် ၁။ တည်ကိန်းနှင့် စားကိန်းတို့ကို ကိန်းရှင်၏ ထပ်ညွှန်းအရ ကြီးစဉ်ငယ်လိုက် စီစဉ်ထားရသည်။

၂။ အကြွင်း၏အဆင့်သည် စားကိန်း၏ အဆင့်အောက် ငယ်ရသည်။ ယေဘုယျအားဖြင့် တည်ကိန်း၏အဆင့်သည် စားကိန်း၏အဆင့်ထက် ကြီးလျှင်သော်လည်းကောင်း၊ တူညီလျှင်သော်လည်းကောင်း ဆက်လက်စားရမည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၃.၆

၁။ အောက်ပါတို့ကို တွက်ပါ။

(က) $(y^3 + 8) \div (y + 2)$ (ခ) $(y^3 + 1) \div (y^2 - y + 1)$

၂။ ပိုလီနိုမီယယ် $15x^4 - 16x^3 + 8x - 17$ ကို $3x^2 + x + 1$ ဖြင့် စား၍ ရရှိသော စားလဒ်နှင့် အကြွင်းတို့ကို ရှာပါ။

၃။ ပိုလီနိုမီယယ် $2x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 3$ ကို $x^2 + 4x + 3$ ဖြင့်စားပါ။

၄။ အောက်ပါတို့ကိုရှင်းပါ။

(က) $(x^3 + 3x^2 - 5) \div (x + 2)$ (ခ) $(3x^5 - 2x^4 + x^2 - 2) \div (x^2 + x + 1)$

၅။ အောက်ပါတို့ကိုရှင်းပါ။

(က) $(4 - 3x^2) \div (2 - \sqrt{3}x)$

(ခ) $(\sqrt{3} + (\sqrt{6} - 2)x - 2\sqrt{2}x^2) \div (\sqrt{3} - 2x)$

(ဂ) $(\sqrt{5}y^3 + (3\sqrt{5} + 6)y^2 + (5\sqrt{5} + 18)y + 40) \div (\sqrt{5}y + 6)$

အခန်း ၄ ဆခွဲကိန်းများခွဲခြင်းနှင့်ထပ်တူညီချက်များ

အမြှောက်ပုံသေနည်းများကိုအသုံးပြု၍ အက္ခရာကိန်းတန်းများဆခွဲကိန်းခွဲခြင်းကို လေ့လာခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ယခုသင်ခန်းစာတွင် နှစ်ထပ်ကိန်းပါကိန်းတန်းတစ်ခုကို **နှစ်ထပ်ကိန်းတိ** (perfect square) ပြောင်း၍ ဆခွဲကိန်းခွဲခြင်းနှင့် ဆခွဲကိန်းများကိုအသုံးပြု၍ မသိကိန်းတစ်လုံးပါ နှစ်ထပ်ညီမျှခြင်းများ ဖြေရှင်းခြင်း အကြောင်းတို့ကို လေ့လာကြရမည်။ ထို့နောက် ထပ်တူညီချက်များနှင့် ကန့်သတ်ချက်ပါ ထပ်တူညီချက်များအကြောင်းကိုလည်း လေ့လာရမည်။

ဤသင်ခန်းစာကို သင်ကြားပြီးပါက နှစ်ထပ်ညီမျှခြင်းများနှင့်သက်ဆိုင်သော ဉာဏ်စမ်းပုစ္ဆာများကို ဖြေရှင်းနိုင်မည်။

၄.၁ နှစ်ထပ်ကိန်းပါကိန်းတန်းကိုနှစ်ထပ်ကိန်းတိပြောင်း၍ဆခွဲကိန်းခွဲခြင်း

အမြှောက်ပုံသေနည်းများကိုအသုံးပြု၍ အက္ခရာကိန်းတန်းများဆခွဲကိန်းခွဲခြင်းနှင့် ပတ်သက်၍ အောက်ပါအချက်များကို ပြန်လည်လေ့လာထားရန်လိုအပ်သည်။

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$
$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

ယခုဆက်လက်၍ နှစ်ထပ်ကိန်းပါကိန်းတန်းကို နှစ်ထပ်ကိန်းတိပြောင်း၍ ဆခွဲကိန်းခွဲခြင်းကို လေ့လာကြမည်။ ပေးထားသော နှစ်ထပ်ကိန်းပါကိန်းတန်း $x^2 + bx + c$ ရှိ x ၏ မြှောက်ဖော်ကိန်း b တစ်ဝက်၏နှစ်ထပ်ကို ပေါင်းထည့်ပေးခြင်းဖြင့် နှစ်ထပ်ကိန်းတိ ပြောင်းနိုင်သည်။

ဥပမာ ၁။ $x^2 + 6x + 5$ ကို နှစ်ထပ်ကိန်းတိပြောင်း၍ ဆခွဲကိန်း ခွဲမည်ဆိုပါစို့။

နှစ်ထပ်ကိန်းတိဖြစ်စေရန် $x^2 + 6x$ တွင် $\left(\frac{6}{2}\right)^2$ ကို ပေါင်းထည့်ပြီး ပြန်နုတ်ရမည်။

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 5 &= \left\{ x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \right\} + 5 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\ &= (x^2 + 6x + 9) + 5 - 9 \\ &= (x + 3)^2 - 4 = (x + 3)^2 - 2^2 \\ &= (x + 3 + 2)(x + 3 - 2) \\ &= (x + 5)(x + 1) \end{aligned}$$

ဥပမာ ၂။ $3x^2 - 13x + 14$ ကို နှစ်ထပ်ကိန်းတိပြောင်း၍ ဆခွဲကိန်း ခွဲမည်ဆိုပါစို့။

ရှေးဦးစွာပေးထားသောကိန်းတန်းကို $x^2 + bx + c$ ရှိ ပုံစံရရှိစေရန် 3 ကို ဘုံထုတ်ရမည်။

$$
\begin{aligned}
(3x^2 - 13x + 14) &= 3(x^2 - \frac{13}{3}x + \frac{14}{3}) \\
&= 3\{x^2 - \frac{13}{3}x + \left(\frac{13}{6}\right)^2 + \frac{14}{3} - \left(\frac{13}{6}\right)^2\} \\
&= 3\{x^2 - \frac{13}{3}x + \left(\frac{13}{6}\right)^2 + \frac{14}{3} - \frac{169}{36}\} \\
&= 3\{(x - \frac{13}{6})^2 - \frac{1}{36}\} \\
&= 3\{(x - \frac{13}{6})^2 - (\frac{1}{6})^2\} \\
&= 3\{(x - \frac{13}{6} - \frac{1}{6})(x - \frac{13}{6} + \frac{1}{6})\} \\
&= 3\{(x - \frac{7}{3})(x - 2)\} \\
&= (3x - 7)(x - 2)
\end{aligned}
$$

ဥပမာ ၃။ $x^2 + 6x + 7$ ကို နှစ်ထပ်ကိန်းတိပြောင်း၍ ဆခွဲကိန်း ခွဲမည်ဆိုပါစို့။

$$
\begin{aligned}
x^2 + 6x + 7 &= x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 7 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 \\
&= (x + 3)^2 + 7 - 9 \\
&= (x + 3)^2 - 2 \\
&= (x + 3)^2 - (\sqrt{2})^2 \\
&= (x + 3 - \sqrt{2})(x + 3 + \sqrt{2})
\end{aligned}
$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၄.၁

၁။ အောက်ပါတို့ကို နှစ်ထပ်ကိန်းတိပြောင်းနည်းအသုံးပြု၍ ဆခွဲကိန်းခွဲပါ။

(က) $a^2 + 7a + 12$ (ခ) $m^2 - 14m + 33$

(ဂ) $x^2 + 16x + 64$ (ဃ) $n^2 + 12n + 27$

(င) $y^2 - 13y + 42$ (စ) $2x^2 + 11x + 15$

(ဆ) $3a^2 - 13a + 14$ (ဇ) $5m^2 - 6m - 8$

(ဈ) $7a^2 + 8a - 12$ (ည) $5c^2 - 24c + 27$

၄.၂ ဆခွဲကိန်းများကိုအသုံးပြုခြင်း

မသိကိန်းနှစ်လုံး၏မြှောက်လဒ်သည် သုညဖြစ်ခဲ့သော် မည်သို့ကောက်ချက်ချနိုင်မည်ကို ဦးစွာလေ့လာမည်။

အကယ်၍ $ab = 0$ ဖြစ်ပြီး $a \neq 0$ ဖြစ်လျှင် $b = 0$ ဖြစ်ကြောင်း သက်သေပြနိုင်သည်။

$a \neq 0$ ဖြစ်သောကြောင့် a ၏လှန်ကိန်း $\frac{1}{a}$ တည်ရှိသည်။ ထိုအခါ $ab = 0$ ၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို $\frac{1}{a}$ ဖြင့်မြှောက်သော်

$\frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a}(0)$ ကိုရသည်။

ဖက်စပ်ရဂုဏ်သတ္တိအရ

$$\left(\frac{1}{a} \times a\right) b = \frac{1}{a}(0)$$

$$(1)\, b = 0$$

$b = 0$ ဖြစ်သည်။

ထို့အတူ $ab = 0$ နှင့် $b \neq 0$ ဖြစ်လျှင် $a = 0$ ဖြစ်ကြောင်းကိုလည်း အထက်ပါနည်းအတိုင်း သက်သေပြနိုင်မည်။ ထို့ကြောင့် အောက်ပါအတိုင်း ကောက်ချက်ချနိုင်သည်။

a နှင့် b တို့သည် ကိန်းစစ်များဖြစ်ကြပြီး $ab = 0$ ဖြစ်လျှင် $a = 0$ သို့မဟုတ် $b = 0$ ဖြစ်သည်။ အပြန်အလှန်အားဖြင့် $a = 0$ သို့မဟုတ် $b = 0$ ဖြစ်လျှင် $ab = 0$ ဖြစ်သည်။

ထိုဂုဏ်သတ္တိကို အသုံးပြု၍ ညီမျှခြင်း၏တစ်ဖက်တွင် 0 ရှိပြီး အခြားတစ်ဖက်တွင် ဆခွဲကိန်းများပါဝင်သော အက္ခရာညီမျှခြင်းများ၏ အဖြေများကို ရှာနိုင်သည်။

ဥပမာ ၁။ $(x-3)(x+4) = 0$ မှ x ၏တန်ဖိုးကို ရှာမည်ဆိုပါစို့။

အထက်ပါဂုဏ်သတ္တိအရ

$x - 3 = 0$ သို့မဟုတ် $x + 4 = 0$ ဖြစ်သည်။

ထိုအခါ $x = 3$ သို့မဟုတ် $x = -4$ ကိုရသည်။

$x = 3$ နှင့် $x = -4$ တို့ကို ပေးထားသောညီမျှခြင်းတွင် အစားသွင်းလျှင် ညီမျှခြင်းကို ပြေလည်ကြကြောင်း တွေ့နိုင်သည်။ ထို့ကြောင့် ညီမျှခြင်း၏အဖြေများသည် $x = 3$ နှင့် $x = -4$ တို့ဖြစ်ကြသည်။

ပုံစံတွက် ၁။ $x(x-4)=0$ ကို ဖြေရှင်းပါ။

$x(x-4)=0$

$x = 0$ သို့မဟုတ် $x-4=0$

$x = 0$ သို့မဟုတ် $x = 4$

ပုံစံတွက် ၂။ $(\frac{1}{x}-\frac{2}{3})(\frac{3}{x}+\frac{1}{2}) = 0$ ကို ဖြေရှင်းပါ။

$(\frac{1}{x}-\frac{2}{3})(\frac{3}{x}+\frac{1}{2}) = 0$

$\frac{1}{x}-\frac{2}{3} = 0$ သို့မဟုတ် $\frac{3}{x}+\frac{1}{2} = 0$

$\frac{1}{x} = \frac{2}{3}$ သို့မဟုတ် $\frac{3}{x} = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{3}{2}$ သို့မဟုတ် $x = -6$

လေ့ကျင့်ခန်း ၄.၂

၁။ အောက်ပါညီမျှခြင်းများကို ဖြေရှင်းပါ။

(က) $x(x-5)=0$ (ခ) $(2r-1)(3r-7)=0$

(ဂ) $(3a-2)(a+7)=0$ (ဃ) $(2b+7)(3b+5)=0$

(င) $2x(x-1)(x+3)=0$ (စ) $4(\frac{1}{3}-\frac{2}{t})=0$

(ဆ) $-3(\frac{5}{4}+\frac{3}{k})=0$ (ဇ) $(\frac{2}{v}-3)(\frac{1}{v}+4)=0$

(ဈ) $(\frac{3}{x}-7)(\frac{1}{x}+6)=0$ (ည) $(\frac{2}{y}-\frac{1}{7})(\frac{1}{y}+\frac{3}{8})=0$

၄.၃ မသိကိန်းတစ်လုံးပါနှစ်ထပ်ကိန်းပါကိန်းတန်းညီမျှခြင်းများဖြေရှင်းခြင်း

ညီမျှခြင်းတစ်ခုတွင်ပါဝင်သော မသိကိန်း၏ အကြီးဆုံးထပ်ညွှန်းသည် 2 ဖြစ်လျှင် ယင်းညီမျှခြင်းကို **နှစ်ထပ်ကိန်းပါကိန်းတန်းညီမျှခြင်း** (quadratic equation) ဟုခေါ်သည်။ နှစ်ထပ်ကိန်းပါကိန်းတန်း ညီမျှခြင်းများ၏ ယေဘုယျပုံစံမှာ $ax^2+bx+c=0$ ဖြစ်သည်။ ဤတွင် x သည် ကိန်းရှင်ဖြစ်၍ a, b နှင့် c တို့သည် ကိန်းသေများဖြစ်ကြပြီး $a \neq 0$ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ $ax^2-2x+3=0, 3x^2-6x=0$ နှင့် $9x^2-25=0$ တို့သည် နှစ်ထပ်ကိန်းပါကိန်းတန်း ညီမျှခြင်းများ ဖြစ်ကြသည်။

ဆခွဲကိန်းခွဲခြင်းကိုအသုံးပြု၍ အထက်ဖော်ပြပါ နှစ်ထပ်ကိန်းပါကိန်းတန်းညီမျှခြင်းများကို ဖြေရှင်းနိုင်သည်။

ဥပမာ ၁။ $x^2-2x-3=0$ ကို ဖြေရှင်းမည်ဆိုပါစို့။

$x^2-2x-3=0$

ညီမျှခြင်း၏လက်ဝဲဘက်ကို ဆခွဲကိန်းခွဲသော် $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$ ကို ရသည်။

ထို့ကြောင့် $(x-3)(x+1)=0$

$x-3=0$ သို့မဟုတ် $x+1=0$

$x=3$ သို့မဟုတ် $x=-1$

$x=3$ နှင့် $x=-1$ တို့သည် မူလညီမျှခြင်းကို ပြေလည်စေသောကြောင့် ညီမျှခြင်း၏ ကိန်းရင်းများ ဖြစ်ကြသည်။

ဥပမာ ၂။ $3x^2-6x=0$ ကို ဖြေရှင်းမည်ဆိုပါစို့။

$3x^2-6x=0$

ညီမျှခြင်း၏နှစ်ဖက်စလုံးကို 3 ဖြင့်စားသော် $x^2-2x=0$ ကိုရသည်။

$x(x-2)=0$

$x=0$ သို့မဟုတ် $x-2=0$

$x=0$ သို့မဟုတ် $x=2$

ထို့ကြောင့် $x=0$ နှင့် $x=2$ တို့သည် မူလညီမျှခြင်းကို ပြေလည်စေသောကိန်းရင်းများ ဖြစ်ကြသည်။

ဥပမာ ၃။ $2x^2-10x=3x-15$ ကို ဖြေရှင်းမည်ဆိုပါစို့။

ပေးထားသောညီမျှခြင်းသည် နှစ်ထပ်ကိန်းပါကိန်းတန်းညီမျှခြင်းများ၏ ယေဘုယျပုံစံ သို့မဟုတ် စံပုံစံ $ax^2+bx+c=0$ အတိုင်း ဖြစ်မနေပေ။ ထို့ကြောင့် ယင်းညီမျှခြင်းကို စံပုံစံသို့ ပြောင်းပြီးမှ အောက်ပါကဲ့သို့ ဖြေရှင်းရမည်။

$$2x^2-10x=3x-15$$

$$2x^2-10x-3x+15=0$$

$$2x^2-13x+15=0$$

ညီမျှခြင်း၏လက်ဝဲဘက်ကို ဆခွဲကိန်းခွဲသော် $2x^2 - 13x + 15 = (2x - 3)(x - 5)$ ကို ရသည်။

$(2x - 3)(x - 5) = 0$

$2x - 3 = 0$ သို့မဟုတ် $x - 5 = 0$

$2x = 3$ သို့မဟုတ် $x = 5$

$x = \dfrac{3}{2}$ သို့မဟုတ် $x = 5$

ထို့ကြောင့် $x = \dfrac{3}{2}$ နှင့် $x = 5$ တို့သည် မူလညီမျှခြင်းကို ပြေလည်စေသောကိန်းရင်းများ ဖြစ်ကြသည်။

ပုံစံတွက် ၁။ $x^2 - 12x - 45 = 0$ ကို ဖြေရှင်း၍ အဖြေ မှန် မမှန် ချိန်ကိုက်ပြပါ။

$x^2 - 12x - 45 = 0$

$(x - 15)(x + 3) = 0$

$x - 15 = 0$ သို့မဟုတ် $x + 3 = 0$

$x = 15$ သို့မဟုတ် $x = -3$

ချိန်ကိုက်ခြင်း

$x = 15$ ဖြစ်လျှင် $15^2 - 12(15) - 45 = 225 - 180 - 45$

$= 225 - 225 = 0$

$x = -3$ ဖြစ်လျှင် $(-3)^2 - 12(-3) - 45 = 9 + 36 - 45$

$= 45 - 45 = 0$

ပုံစံတွက် ၂။ $3(x^2 - 2) = 4\left(x - 1\dfrac{1}{2}\right)$ ကို ဖြေရှင်း၍ အဖြေ မှန် မမှန် ချိန်ကိုက်ပြပါ။

$3(x^2 - 2) = 4\left(x - 1\dfrac{1}{2}\right)$

$3x^2 - 6 = 4\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$

$3x^2 - 6 = 4x - 6$

$3x^2 - 6 - 4x + 6 = 0$

$3x^2 - 4x = 0$

$x(3x - 4) = 0$

$x = 0$ သို့မဟုတ် $3x - 4 = 0$

$x = 0$ သို့မဟုတ် $3x = 4$

$x = 0$ သို့မဟုတ် $x = \dfrac{4}{3}$

ချိန်ကိုက်ခြင်း

$x = 0$ ဖြစ်လျှင်

လက်ဝဲဘက် $= 3(0^2 - 2) = 3(-2) = -6$

လက်ယာဘက် $= 4(0 - 1\frac{1}{2}) = 4(-\frac{3}{2}) = -6$

$\therefore$ လက်ဝဲဘက် = လက်ယာဘက်

$x = \frac{4}{3}$ ဖြစ်လျှင်

$$\text{လက်ဝဲဘက်} = 3\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2\right)$$
$$= 3\left(\frac{16}{9} - 2\right)$$
$$= 3\left(\frac{16-18}{9}\right)$$
$$= -\frac{2}{3}$$

$$\text{လက်ယာဘက်} = 4\left(\frac{4}{3} - 1\frac{1}{2}\right)$$
$$= 4\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2}\right)$$
$$= 4\left(\frac{8-9}{6}\right)$$
$$= -\frac{2}{3}$$

$\therefore$ လက်ဝဲဘက် = လက်ယာဘက်

ပုံစံတွက် ၃။ $x^2 - 10x + 18 = 0$ ကို ဖြေရှင်းပါ။

$$x^2 - 10x + 18 = 0$$
$$x^2 - 10x + 5^2 + 18 - 5^2 = 0$$
$$(x-5)^2 + 18 - 25 = 0$$
$$(x-5)^2 - 7 = 0$$
$$(x-5)^2 - (\sqrt{7})^2 = 0$$
$$(x - 5 - \sqrt{7})(x - 5 + \sqrt{7}) = 0$$

$x - 5 - \sqrt{7} = 0$ သို့မဟုတ် $x - 5 + \sqrt{7} = 0$

$x = 5 + \sqrt{7}$ သို့မဟုတ် $x = 5 - \sqrt{7}$

ပုံစံတွက် ၄။ ထောင့်မှန်စတုဂံပုံအခန်းတစ်ခု၏ ကြမ်းပြင်ဧရိယာသည် 144 စတုရန်းပေ ဖြစ်သည်။ အခန်း၏အလျားသည် အနံထက် 10 ပေ ပိုရှည်သော် အခန်း၏ အလျားနှင့်အနံတို့ကို ရှာပါ။

အခန်း၏အနံ = x ပေ ဟုထားပါ။

အခန်း၏အလျား = $(x + 10)$ ပေ

ပုစ္ဆာအရ

$$x(x+10) = 144$$

$$x^2 + 10x = 144$$

$$x^2 + 10x - 144 = 0$$

$$(x+18)(x-8) = 0$$

$x + 18 = 0$ သို့မဟုတ် $x - 8 = 0$

$x = -18$ သို့မဟုတ် $x = 8$

အခန်း၏အနံသည် -18 ပေ မဖြစ်နိုင်ပေ။ ထို့ကြောင့် အခန်း၏ အနံသည် 8 ပေ ဖြစ်သည်။

အခန်း၏အလျား $= 8 + 10 = 18$ ပေ

မှတ်ရန်။ အထက်ပါပုစ္ဆာတွင် မူလနှစ်ထပ်ကိန်းပါကိန်းတန်းညီမျှခြင်း၌ အဖြေနှစ်ခုရှိသော်လည်း အဖြေတစ်ခုမှာ ပုစ္ဆာအတွက်မဖြစ်နိုင်သောကြောင့် ပယ်ရမည်ကို သတိပြုပါ။

လေ့ကျင့်ခန်း ၄.၃

၁။ အောက်ပါနှစ်ထပ်ကိန်းပါကိန်းတန်းညီမျှခြင်းများ၏ ကိန်းရင်းအသီးသီးကိုရှာပါ။

(က) $2x^2 + 5x - 7 = 0$ (ခ) $(3b-1)^2 = 10$

(ဂ) $x^2 + (x-1)^2 = 1$ (ဃ) $y^2 = 10y - 22$

(င) $(x+2)(x+3) = x + 3$ (စ) $(y+1)(y-1) = 3$

(ဆ) $x + \dfrac{2}{x} = 3$ (ဇ) $x - \dfrac{9}{x} = 8$

(ဈ) $\dfrac{1}{2}x(x+1) = 15$ (ည) $(2x+5)^2 + (2x+5) = 2$

၂။ အောက်ပါညီမျှခြင်းများကိုဖြေရှင်း၍ အဖြေ မှန် မမှန် ချိန်ကိုက်ပြပါ။

(က) $(2x + 1)(3x - 1) = 14$ (ခ) $(2x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}(4x + 1)(4x - \frac{5}{2})$

၃။ ကိန်းနှစ်ခု၏ ပေါင်းလဒ်သည် 25 ဖြစ်ပြီး ယင်းတို့၏မြှောက်လဒ်သည် 136 ဖြစ်သော် ထိုကိန်းတို့ကို ရှာပါ။

၄။ အစဉ်လိုက်ဖြစ်သောသဘာဝကိန်းနှစ်ခုတို့၏ မြှောက်လဒ်သည် 240 ဖြစ်လျှင် ထိုကိန်းနှစ်ခုတို့ကို ရှာပါ။

၅။ အစဉ်လိုက်ဖြစ်သော ကိန်းနှစ်ခုတို့၏နှစ်ထပ်ကိန်းများပေါင်းလဒ်သည် 145 ဖြစ်လျှင် ထိုကိန်းနှစ်ခုတို့ကို ရှာပါ။

၆။ ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခုရှိ အနားများ၏အလျားများသည် အစဉ်လိုက်ဖြစ်နေသောကိန်း သုံးခုဖြစ်လျှင် ထိုတြိဂံ၏ အနားအလျားများကို ရှာပါ။

၇။ ထောင့်မှန်စတုဂံပုံ မှန်ချပ်တစ်ခု၏ဧရိယာမှာ 1500 စတုရန်းလက်မဖြစ်ပြီး ပတ်လည်အနားမှာ 160 လက်မ ဖြစ်လျှင် အလျားနှင့်အနံတို့ကို ရှာပါ။

၈။ တြိဂံတစ်ခု၏အမြင့်သည် အခြေအနားထက် 5 စင်တီမီတာ ပို၍ရှည်သည်။ တြိဂံ၏ဧရိယာမှာ 75 စတုရန်းစင်တီမီတာရှိသော် အမြင့်ကို ရှာပါ။

၉။ 1 မှစ၍ ဆက်တိုက်ဖြစ်သောကိန်းပြည့် n ခု၏ပေါင်းလဒ် S ကို ရှာရန်ပုံသေနည်းမှာ $S = \frac{1}{2} n (n + 1)$ ဖြစ်၏။ ပေါင်းလဒ် 210 ရရှိရန် 1 မှစ၍ ကိန်းလုံးရေ မည်မျှကို ပေါင်းရမည်နည်း။

၁၀။ စတုရန်းနှစ်ခု၏ အလျားများခြားနားခြင်းသည် 5 လက်မဖြစ်ပြီး ဧရိယာနှစ်ခုပေါင်းလဒ်သည် 97 စတုရန်းလက်မဖြစ်လျှင် အလျားများကို ရှာပါ။

၁၁။ 2 ပေရှည်သောမျဉ်းတစ်ကြောင်းကို နှစ်ပိုင်းပိုင်းရာ ယင်းတို့၏မြှောက်လဒ်သည် 108 စတုရန်းလက်မဖြစ်လျှင် တစ်ပိုင်းစီ၏အလျားကို ရှာပါ။

၁၂။ စတုရန်းပုံရှိသော မြက်ခင်းပတ်လည်ကို 6 ပေကျယ်သော လမ်းခင်းထား၏။ လမ်း၏ဧရိယာသည် မြက်ခင်းဧရိယာ၏ $1\frac{1}{4}$ ဆရှိလျှင် မြက်ခင်း၏အလျားကို ပေဖြင့် ဖော်ပြပါ။

၁၃။ ကိန်းတစ်ခုနှင့် ယင်း၏လှန်ကိန်းပေါင်းလဒ်သည် $\frac{10}{29}$ ဖြစ်လျှင် ထိုကိန်းကို ရှာပါ။

၁၄။ A ၏ အသက်သည် 12 နှစ်ဖြစ်ပြီး B ၏ အသက်သည် 15 နှစ်ဖြစ်သည်။ နှစ်ပေါင်းမည်မျှ ကြာလျှင် ထိုသူနှစ်ယောက်တို့၏ အသက်များမြှောက်လဒ်သည် 460 ဖြစ်မည်နည်း။

၁၅။ ထောင့်မှန်တြိဂံတစ်ခု၏ ထောင့်မှန်ခံအနားသည် 25 စင်တီမီတာရှိပြီး ကျန်အနားနှစ်ဖက် ခြားနားခြင်းသည် 5 စင်တီမီတာဖြစ်လျှင် အနားတို့၏ အလျားများကို ရှာပါ။

၁၆။ ကိန်းနှစ်ခုတို့၏ခြားနားခြင်းသည် $2\sqrt{2}$ ဖြစ်သည်။ ယင်းကိန်းနှစ်ခုပေါင်းလဒ်၏ နှစ်ထပ်ကိန်းတန်ဖိုးသည် 200 ဖြစ်လျှင် ထိုကိန်းတို့ကို ရှာပါ။

၄.၄ ထပ်တူညီချက်များနှင့်ကန့်သတ်ရှိထပ်တူညီချက်များ

ပုံသေနည်း $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ တွင် x နှင့် y တို့ကို တန်ဖိုးတစ်ခုခု ထား၍ လေ့လာကြည့်ပါ။ ဥပမာအားဖြင့် $x = 1$ နှင့် $y = 1$ ဖြစ်လျှင်

$$\text{ညီမျှခြင်း၏ဝဲဘက်} = (1+1)^2 = 4$$

$$\text{ညီမျှခြင်း၏ယာဘက်} = 1^2 + 2(1)(1) + 1^2 = 4$$

ဝဲဘက်နှင့် ယာဘက်တန်ဖိုးများ တူညီနေကြသည်။ ထို့နောက် $x = 1$ နှင့် $y = 2$၊ $x = 3$ နှင့် $y = 2$ စသည့်တန်ဖိုးများပေး၍ လေ့လာကြည့်လျှင် ဝဲဘက်နှင့်ယာဘက်တန်ဖိုးများ တူညီကြောင်းတွေ့နိုင်သည်။ ဆက်လက်၍ အခြားကိန်းစစ်တန်ဖိုးများအမျိုးမျိုး ပေးခြင်းဖြင့် စမ်းသပ်ကြည့်လျှင်လည်း ဝဲဘက်နှင့်ယာဘက်တို့၏တန်ဖိုးများ တူညီနေသည်ကို တွေ့နိုင်သည်။ ထို့ကြောင့် ညီမျှခြင်းသည် ကိန်းစစ် x နှင့် y အားလုံးတို့အတွက် မှန်သည်။ ထိုညီမျှခြင်းကို **ထပ်တူညီချက်** (identity) ဟုခေါ်သည်။ ထပ်တူညီချက်ကို အောက်ပါအတိုင်း အဓိပ္ပာယ် ဖွင့်ဆိုနိုင်သည်။

> **မသိကိန်းများပါသော ညီမျှခြင်းတစ်ခုတွင် ညီမျှခြင်းကိုအဓိပ္ပာယ်ရှိစေမည့် မည်သည့် မသိကိန်းတန်ဖိုးမဆို ညီမျှခြင်းကို ပြေလည်နေလျှင် ထိုညီမျှခြင်းကို ထပ်တူညီချက်ဟုခေါ်သည်။**

ယခု မြှောက်လဒ် $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$ ကို လေ့လာကြမည်။

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$$
$$= x(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) + y(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$$
$$+ z(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$$
$$= x^3 + xy^2 + xz^2 - xyz - x^2z - x^2y + yx^2 + y^3 + yz^2 - y^2z - yzx - xy^2$$
$$+ zx^2 + zy^2 + z^3 - yz^2 - z^2x - xyz$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

ထို့ကြောင့်

$$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \quad \ldots\ldots (1)$$

x, y, z တို့၏ မည်သည့်တန်ဖိုးမဆို ညီမျှခြင်းကို ပြေလည်သည်။ ထို့ကြောင့် အထက်ပါညီမျှခြင်းသည် ထပ်တူညီချက်တစ်ခု ဖြစ်သည်။

အကယ်၍ $x + y + z = 0$ ဖြစ်လျှင်

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \quad \ldots\ldots (2)$

သတိပြုရန်မှာ အထက်ပါညီမျှခြင်း (2) သည် အားလုံးသော x , y, z တန်ဖိုးတို့ အတွက် မမှန်ပေ။ ဥပမာအားဖြင့် $x = 1$, $y = 1$ နှင့် $z = 2$ တို့ကို ညီမျှခြင်း (2) တွင် အစားသွင်းသော်

ဝဲဘက်သည်

$1 + 1 + 8 = 10$ ဖြစ်၍

ယာဘက်သည်

$3 \times 1 \times 1 \times 2 = 6$ ဖြစ်မည်။ ထိုတန်ဖိုးများသည် ညီမျှခြင်း (2) ကို မပြေလည်ကြပေ။ ညီမျှခြင်း $x + y + z = 0$ ကို ပြေလည်စေသော x, y, z တို့၏တန်ဖိုးများသည် ညီမျှခြင်း (2) ကို ပြေလည်စေသည်။ တစ်နည်းအားဖြင့် ကန့်သတ်ချက် $x + y + z = 0$ ကို ပြေလည်စေသော x, y, z တို့၏ တန်ဖိုးများသာလျှင် ညီမျှခြင်း (2) ကို ပြေလည်စေသည်။ ထို့ကြောင့် ညီမျှခြင်း (2) ကို **ကန့်သတ်ရှိထပ်တူညီချက်** (conditional identity) ဟုခေါ်သည်။

"အကယ်၍ $x + y + z = 0$ ဖြစ်လျှင် $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ ဖြစ်မည်။"

အထက်ပါနည်းတူ ညီမျှခြင်း $x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = 0$ တွင် ပြေလည်သော x , y, z တို့၏တန်ဖိုးများမှာ $x = 1$, $y = 1$ နှင့် $z = 1$ ဖြစ်ကြောင်းတွေ့မြင်နိုင်ပြီး ယင်းတန်ဖိုးတို့သည် ညီမျှခြင်း $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ ကိုပြေလည်ကြောင်း လွယ်ကူစွာ တွေ့နိုင်သည်။

အထက်ပါလေ့လာချက်များအရ ကန့်သတ်ရှိထပ်တူညီချက်ကို အောက်ပါအတိုင်း အဓိပ္ပာယ်ဖွင့်ဆိုနိုင်သည်။

ကန့်သတ်ရှိထပ်တူညီချက်ဆိုသည်မှာ သတ်မှတ်ထားသောကန့်သတ်ချက် တစ်ခုကိုပြေလည်သည့် မသိကိန်းများ၏ ထပ်တူညီချက်တစ်ခုဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ၁။ a, b နှင့် c တို့သည် ကိန်းစစ်များဖြစ်လျှင်
$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b)$
ဖြစ်ကြောင်း သက်သေပြပါ။

$(b-c)+(c-a)+(a-b)= 0$ ဖြစ်သောကြောင့် ညီမျှခြင်း (2) အရ
$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3 = 3(b-c)(c-a)(a-b)$ ဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ၂။ x နှင့် y တို့သည် ကိန်းစစ်များဖြစ်ကြပြီး $x-y=0$ ဖြစ်လျှင် $x^2-y^2=0$ ဖြစ်ကြောင်းသက်သေပြပါ။

$$\begin{aligned} x^2-y^2 &= (x-y)(x+y) \\ &= (x+y)(0) \qquad (\because x-y=0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၄.၄

၁။ $a^3(b-c)^3+b^3(c-a)^3+c^3(a-b)^3 = 3abc(b-c)(c-a)(a-b)$ ဖြစ်ကြောင်း သက်သေပြပါ။

၂။ $(x-2y)^3+(2y-3z)^3+(3z-x)^3 = 3(x-2y)(2y-3z)(3z-x)$ ဖြစ်ကြောင်း သက်သေပြပါ။

၃။ $(1+a^2)(1+b^2)-(1+ab)^2=(a-b)^2$ ဖြစ်ကြောင်း သက်သေပြပါ။

၄။ $a+b+c=0$ ဖြစ်လျှင် $a^2+b^2+c^2= -2(ab+bc+ca)$ ဖြစ်ကြောင်း သက်သေပြပါ။

အခန်း ၅ အက္ခရာအပိုင်းကိန်း သို့မဟုတ် ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများ

ဤသင်ခန်းစာတွင် ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများအကြောင်းနှင့် ယင်းတို့၏လုပ်ထုံးလုပ်နည်းများအကြောင်းကို လေ့လာကြမည်။ ဤသင်ခန်းစာကိုသင်ယူပြီးပါက ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများ ပေါင်းခြင်း၊ နုတ်ခြင်း၊ မြှောက်ခြင်း နှင့် စားခြင်း စသည့်လုပ်ထုံးတို့ကို အသုံးပြု၍ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများပါသောပုစ္ဆာများကို ဖြေရှင်းနိုင်မည်။

၅.၁ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများ

$\dfrac{P}{Q}$, $Q \neq 0$ ပုံစံရှိသောဖော်ပြချက်ကို အက္ခရာအပိုင်းကိန်း သို့မဟုတ် ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်း ဟုခေါ်သည်။ ဤတွင် P နှင့် Q တို့သည် ပိုလီနိုမီယယ်များဖြစ်ကြသည်။

ဥပမာ $\dfrac{2x-1}{3x+1}$, $\dfrac{x^2-x+1}{x^2-1}$, $\dfrac{2y+3y^2+1}{4-y+y^2}$ တို့သည် ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများဖြစ်သည်။

၎င်းတို့တွင် ပထမနှင့် ဒုတိယကိန်းတန်း တို့သည် x ဖြင့်ပြသောရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများဖြစ်၍ တတိယကိန်းတန်းသည် y ဖြင့်ပြသောရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်း $\dfrac{6x^2+5x-4}{3x^2+19x+20}$ ကိုအရှင်းဆုံးပုံစံပြောင်းပါ။

$$\frac{6x^2+5x-4}{3x^2+19x+20} = \frac{(3x+4)(2x-1)}{(3x+4)(x+5)} = \frac{2x-1}{x+5}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၅.၁

၁။ အောက်ပါတို့ကို အရှင်းဆုံးပုံစံပြောင်းပါ။

(က) $\dfrac{7a^2-29a+4}{a^2-8a+16}$ (ခ) $\dfrac{12n^2-29n-8}{28n^2-5n-3}$ (ဂ) $\dfrac{6a^2-24a+24}{6a^2-24}$

(ဃ) $\dfrac{3x^2+25x-18}{3x^2-23x+14}$ (င) $\dfrac{(x^2)^2-(y^2)^2}{(x-y)(x+y)}$ (စ) $\dfrac{a^4+2a^2+1}{a^2+1}$

(ဆ) $\dfrac{3xy+36y-5x-60}{2x^2-288}$

၂။ ပိုင်းဝေသည် အဆင့် 4 ရှိပြီး ပိုင်းခြေသည် အဆင့် 3 ရှိသော x ဖြင့်ပြသည့် ပိုလီနိုမီယယ်များဖြင့် ဖော်ပြသော ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းတစ်ခုကို ရေးပါ။

၃။ ပိုင်းဝေနှင့်ပိုင်းခြေတို့သည် အဆင့် 3 ရှိသော ပိုလီနိုမီယယ်များဖြစ်ပြီး ပိုင်းဝေသည် ပိုင်းခြေ၏ 5 ဆဖြစ်သော ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းကိုရေးပြပါ။

၅.၂ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများပေါင်းခြင်း

A, B, C နှင့် D တို့သည် ပိုလီနိုမီယယ်များဖြစ်ပြီး $B \neq 0, D \neq 0$ ဖြစ်လျှင်

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{(A\times D)+(C\times B)}{B\times D}$$

ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်း $\frac{5x-1}{5x+1}$ နှင့် $\frac{2x+1}{1-2x}$ တို့ကိုပေါင်းပါ။

$$\frac{5x-1}{5x+1} + \frac{2x+1}{1-2x} = \frac{(5x-1)(1-2x) + (2x+1)(5x+1)}{(5x+1)(1-2x)}$$

$$= \frac{5x-10x^2-1+2x+10x^2+2x+5x+1}{5x-10x^2+1-2x}$$

$$= \frac{14x}{-10x^2+3x+1}$$

ဥပမာ ၂။ $\frac{2y+y^2-1}{1-y} + \frac{2y-3y^2}{1+y}$ ကိုရှင်းပါ။

$$\frac{2y+y^2-1}{1-y} + \frac{2y-3y^2}{1+y} = \frac{(2y+y^2-1)(1+y)+(2y-3y^2)(1-y)}{(1-y)(1+y)}$$

$$= \frac{2y+2y^2+y^2+y^3-1-y+2y-2y^2-3y^2+3y^3}{1-y^2}$$

$$= \frac{4y^3-2y^2+3y-1}{1-y^2}$$

ဥပမာ ၃။ $\frac{1}{1-\sqrt{2}x} + \frac{1}{1+\sqrt{2}x}$ ကိုရှင်းပါ။

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}x} + \frac{1}{1+\sqrt{2}x} = \frac{1+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}x}{(1-\sqrt{2}x)(1+\sqrt{2}x)} = \frac{2}{1-(\sqrt{2}x)^2} = \frac{2}{1-2x^2}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၅.၂

၁။ အောက်ပါတို့ကို ရှင်းပါ။

(က) $\dfrac{\sqrt{7}x}{x+y}+\dfrac{\sqrt{7}y}{x+y}$

(ခ) $\dfrac{3ab}{a+2b}+\dfrac{a^2+2b^2}{a+2b}$

(ဂ) $\dfrac{2x-y}{x^2-y^2}+\dfrac{2y-x}{x^2-y^2}$

(ဃ) $\dfrac{2a-3b}{3ab}+\dfrac{4a+2b}{3ab}+\dfrac{3a+b}{3ab}$

(င) $\dfrac{k^2+k}{k^2-9}+\dfrac{k-3}{k^2-9}$

(စ) $\dfrac{x+4}{2x^2-x-1}+\dfrac{x-3}{2x^2-x-1}$

၂။ အောက်ပါတို့ကို ရှင်းပါ။

(က) $\dfrac{2+3x}{x}+\dfrac{4x-5x^2}{x^3}$

(ခ) $\dfrac{5}{6t+6}+\dfrac{3}{2t+2}$

(ဂ) $\dfrac{x+\sqrt{5}}{ax}+\dfrac{3}{a}$

(ဃ) $\dfrac{x+3}{\sqrt{5}x-1}+\dfrac{2x+5}{\sqrt{5}x+1}$

(င) $\dfrac{2c}{c^2-d^2}+\dfrac{3}{c+d}$

(စ) $\dfrac{2x+1}{5x-10}+\dfrac{x-3}{x-2}$

(ဆ) $\dfrac{2}{t+2}+\dfrac{3}{t+3}$

(ဇ) $\dfrac{3}{3b-4}+\dfrac{5}{5b+6}$

(ဈ) $\dfrac{y+1}{y+2}+\dfrac{y+2}{y+3}$

(ည) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+1}{x-1}$

(ဋ) $\dfrac{3x}{x^2-4x+3}+\dfrac{2}{x-3}$

(ဌ) $\dfrac{3z-4}{z^2-z-20}+\dfrac{2}{z-5}$

၅.၃ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများနုတ်ခြင်း

ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းတစ်ခုကို ပေးထားသော ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းတစ်ခုတွင် ထည့်ပေါင်းသော် သုညရလျှင် ထိုရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းသည် ပေးရင်းရာရှင်နယ်ကိန်းတန်း၏ **အပေါင်းပြောင်းပြန်** (additive inverse) ဖြစ်သည်။

ဥပမာ $\dfrac{x+1}{x-1}+\left(-\dfrac{x+1}{x-1}\right)=\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{-x-1}{x-1}$

$$=\dfrac{x+1-x-1}{x-1}=\dfrac{0}{x-1}=0$$

ထို့ကြောင့် $\frac{x+1}{x-1}$ ၏အပေါင်းပြောင်းပြန်သည် $-\frac{x+1}{x-1}$ ဖြစ်၏။

ယေဘုယျအားဖြင့် $\frac{P}{Q}$ သည် ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းတစ်ခုဖြစ်လျှင် $\frac{P}{Q}$ ၏အပေါင်းပြောင်းပြန်သည် $-\frac{P}{Q}$ ဖြစ်သည်။

ဆက်လက်၍ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းတစ်ခုကို အခြားရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းတစ်ခုမှနုတ်ခြင်းဆိုင်ရာ ဥပဒေသကို သတ်မှတ်မည်။

$\frac{A}{B}$ နှင့် $\frac{C}{D}$ တို့သည် ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများဖြစ်ပြီး $B \neq 0, D \neq 0$ ဖြစ်လျှင်

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + (-\frac{C}{D})$$

$$= \frac{(A\times D)+(-C)B}{B\times D} = \frac{(A \times D)-(C \times B)}{B \times D}$$ ဖြစ်သည်။

A, B, C နှင့် D တို့သည် ပိုလီနိုမီယယ်များဖြစ်ပြီး $B \neq 0, D \neq 0$ ဖြစ်လျှင်

$$\boxed{\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{(A \times D)-(C \times B)}{B \times D}}$$

ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်း $\frac{x-1}{x+1}$ မှ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်း $\frac{x+1}{x-1}$ ကို နုတ်ပါ။

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x-1)-(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-2x+1-(x^2+2x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-2x+1-x^2-2x-1}{x^2-1} = \frac{-4x}{x^2-1}$$

ဥပမာ ၂။ $\dfrac{4y-y^2+1}{1-y} - \dfrac{2y+y^2-1}{2+y}$ ကိုရှင်းပါ။

$$\frac{4y-y^2+1}{1-y} - \frac{2y+y^2-1}{2+y}$$

$$= \frac{(4y-y^2+1)(2+y)-(2y+y^2-1)(1-y)}{(1-y)(2+y)}$$

$$= \frac{8y+4y^2-2y^2-y^3+2+y-(2y-2y^2+y^2-y^3-1+y)}{2+y-2y-y^2}$$

$$= \frac{9y+2y^2-y^3+2-3y+y^2+y^3+1}{2-y-y^2} = \frac{3y^2+6y+3}{2-y-y^2}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၅.၃

အောက်ပါတို့ကို ရှင်းပါ။

၁။ $\dfrac{y}{y-\sqrt{7}} - \dfrac{7}{y+\sqrt{7}}$

၂။ $\dfrac{r^2}{r+\sqrt{11}} - \dfrac{11}{r+\sqrt{11}}$

၃။ $\dfrac{r^2-3s^2}{r+s} - \dfrac{2rs}{r+s}$

၄။ $\dfrac{3z}{z^2-2z-15} - \dfrac{2z+5}{z^2-2z-15}$

၅။ $\dfrac{b^2+2b}{b^2+4b-12} - \dfrac{b+6}{b^2+4b-12}$

၆။ $\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x^3}$

၇။ $\dfrac{2x}{b^2} - \dfrac{6bx^2+x}{b^2x}$

၈။ $1 - \dfrac{m^2}{m^2+n^2}$

၉။ $\dfrac{x-7}{x^2-16} - \dfrac{x-1}{16-x^2}$

၁၀။ $\dfrac{5xy}{x^2-y^2} - \dfrac{x-y}{x+y}$

၁၁။ $\dfrac{6}{z^2+4z+4} - \dfrac{2}{z^2-4}$

၁၂။ $\dfrac{2}{a^2-9} - \dfrac{2}{a^2-1} + \dfrac{2}{a^2-2a-3}$

၅.၄ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများမြှောက်ခြင်း

A, B, C နှင့် D တို့သည် ပိုလီနိုမီယယ်များဖြစ်ပြီး $B \neq 0, D \neq 0$ ဖြစ်လျှင်

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D} = \frac{A\times C}{B\times D}$$

ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်း $\frac{x+1}{x-1}$ နှင့် $\frac{2x-1}{x+\frac{1}{2}}$ တို့ကိုမြှောက်ပါ။

$$\frac{x+1}{x-1}\times\frac{2x-1}{x+\frac{1}{2}} = \frac{(x+1)(2x-1)}{(x-1)(x+\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{2x^2-x+2x-1}{x^2+\frac{1}{2}x-x-\frac{1}{2}} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$$

ဥပမာ ၂။ $\frac{2x^2+x-6}{x^2-1}$ နှင့် $\frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$ တို့ကိုမြှောက်ပါ။

$$\frac{2x^2+x-6}{x^2-1}\times\frac{x^2+2x+1}{x^2-4} = \frac{(2x-3)(x+2)}{(x-1)(x+1)}\times\frac{(x+1)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{(2x-3)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{2x^2-x-3}{x^2-3x+2}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၅.၄

အောက်ပါတို့၏ မြှောက်လဒ်ကိုရှာပါ။

၁။ $\frac{2z-4}{3z+6}\times\frac{2z+3}{z-2}$

၂။ $\frac{a^2-5}{a^2-16}\times\frac{a+4}{a+\sqrt{5}}$

၃။ $\frac{x^2+5x+6}{2x-2}\times\frac{x^2-x}{x+3}$

၄။ $\frac{n^2-3n-4}{n^2-2n}\times\frac{n-2}{n+1}$

၅။ $\frac{p^2+p-2}{p^2-3p+2}\times\frac{p^2-p-2}{p^2-5p+6}$

၆။ $\frac{x-\sqrt{7}}{x^2+\sqrt{7}x}\times\frac{x^2-7}{x^2-\sqrt{7}x}$

၇။ $\dfrac{r^2+s^2}{r^2-s^2} \times \dfrac{r-s}{r+s}$

၈။ $\dfrac{n^2-11n+30}{n^2-6n+9} \times \dfrac{n^2-3n}{n^2-5n}$

၉။ $\dfrac{t^2+2t-3}{t^2-9} \times \dfrac{t^2+5t+6}{t^2-1}$

၁၀။ $\dfrac{n^2-4}{n^2-5n+6} \times \dfrac{n^2-2n-3}{n^2+3n+2}$

၁၁။ $\dfrac{z^2+z-6}{z^2-9} \times \dfrac{z+3}{3z+9}$

၁၂။ $\dfrac{b^2+5bc+4c^2}{bc+4c^2} \times \dfrac{b^2+5bc}{b^2+6bc+5c^2}$

၁၃။ $\dfrac{6b^2+13b+6}{4b^2-9} \times \dfrac{6b^2+31b-30}{18b^2-3b-10}$

၁၄။ $\dfrac{3t^2-27}{t^2+t-6} \times \dfrac{t^2+3t}{6} \times \dfrac{2t-4}{t-3}$

၁၅။ $\dfrac{12+r-r^2}{9-r^2} \times \dfrac{r+2}{r^2+r} \times \dfrac{3+2r-r^2}{8+2r-r^2}$

၁၆။ $\dfrac{20+y-y^2}{y^2-6y+5} \times \dfrac{6-5y-y^2}{y^2+7y+12} \times \dfrac{y^2-9}{36-y^2}$

၅.၅ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများစားခြင်း

P နှင့် Q တို့သည် ပိုလီနိုမီယယ်များဖြစ်လျှင် ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်း $\dfrac{P}{Q}$ ၏လှန်ကိန်းသည် $\dfrac{Q}{P}$ ဖြစ်ပြီး $\dfrac{P}{Q} \times \dfrac{Q}{P} = 1$ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ $\dfrac{x-3}{x^2+2x+1}$ သည် $\dfrac{x^2+2x+1}{x-3}$ ၏လှန်ကိန်းဖြစ်သည်။

ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများစားရာတွင်တည်ကိန်းကိုစားကိန်းဖြစ်သည့်ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်း၏လှန်ကိန်းဖြင့်မြှောက်ရသည်။

A, B, C နှင့် D တို့သည် ပိုလီနိုမီယယ်များဖြစ်ပြီး $B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ ဖြစ်လျှင်

$$\boxed{\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{A \times D}{B \times C}}$$

ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်း $\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ ကို $\dfrac{x^2-1}{x+2}$ ဖြင့်စားပါ။

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x+1}{x-1} \div \frac{x^2-1}{x+2} &= \frac{x^2+x+1}{x-1} \times \frac{x+2}{x^2-1} \\
&= \frac{(x^2+x+1)(x+2)}{(x-1)(x^2-1)} \\
&= \frac{x^3+x^2+x+2x^2+2x+2}{x^3-x^2-x+1} \\
&= \frac{x^3+3x^2+3x+2}{x^3-x^2-x+1}
\end{aligned}$$

ဥပမာ ၂။ $\dfrac{x^2-16}{x+4}$ ကို $\dfrac{x^2-8x+16}{4-x}$ ဖြင့်စားပါ။

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-16}{x+4} \div \frac{x^2-8x+16}{4-x} &= \frac{x^2-16}{x+4} \times \frac{4-x}{x^2-8x+16} \\
&= \frac{(x^2-16)(4-x)}{(x+4)(x^2-8x+16)} \\
&= \frac{(x+4)(x-4)(-1)(x-4)}{(x+4)(x-4)(x-4)} = -1
\end{aligned}$$

ဥပမာ ၃။ $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x+1} \div \dfrac{x-2}{7} \times \dfrac{4}{x}$ ကိုရှင်းပါ။

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1} \div \frac{x-2}{7} \times \frac{4}{x} &= \frac{x^2-x-2}{x^2+2x+1} \times \frac{7}{x-2} \times \frac{4}{x} \\
&= \frac{(x+1)(x-2)(7)(4)}{(x+1)(x+1)(x-2)x} \\
&= \frac{28}{x^2+x}
\end{aligned}$$

ဥပမာ ၄။ $\dfrac{\dfrac{x+3y}{2y}}{\dfrac{2x-y}{4y^2}}$ ကိုရှင်းပါ။

$$\frac{\dfrac{x+3y}{2y}}{\dfrac{2x-y}{4y^2}} = \frac{x+3y}{2y} \times \frac{4y^2}{2x-y}$$

$$= \frac{(x+3y)(4y^2)}{2y(2x-y)} = \frac{2y(x+3y)}{2x-y} = \frac{2yx+6y^2}{2x-y}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၅.၅

၁။ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်း $\dfrac{x^2+20x+5}{x+1}$ နှင့် ၎င်း၏လှန်ကိန်းတို့ ပေါင်းလဒ်ကိုရှာပါ။

၂။ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်း $\dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2+1}$ မှ ၎င်း၏လှန်ကိန်းကို နုတ်ပါ။

၃။ အောက်ပါတို့ကိုရှင်းပါ။

(က) $\dfrac{81k}{28k} \div \dfrac{9k}{7k^3}$ (ခ) $\dfrac{q^2-9}{q^2+6q+9} \div \dfrac{q^2-2q-3}{q^2+2q-3}$

(ဂ) $\dfrac{9-a^2}{3a-3\sqrt{6}} \div \dfrac{9-6a+a^2}{6-a^2}$ (ဃ) $\dfrac{4z^2+8z+3}{2z^2-5z+3} \div \dfrac{1-4z^2}{6z^2-9z}$

(င) $\dfrac{1-4t^2}{t^2-4} \div \dfrac{4t+2}{t^2+2t}$ (စ) $\dfrac{c^2+2c^3}{9-c^2} \div \dfrac{c-4c^3}{3c+c^2}$

(ဆ) $\dfrac{2n^2-18}{n^2+6n-7} \div \dfrac{8n^2+4n-24}{n^2-1}$ (ဇ) $\dfrac{20+r-r^2}{r^2+7r+12} \div \dfrac{(r-5)^2}{(r+3)^2}$

(ဈ) $\dfrac{3s^2-14s+8}{2s^2-3s-20} \div \dfrac{6-25s+24s^2}{15-34s-16s^2}$ (ည) $\dfrac{2x^2-5x-5}{3x^2-10x-8} \div \dfrac{9-x^2}{12+x-x^2}$

(ဋ) $\dfrac{x-3y}{3x} \div \dfrac{8x-24y}{9x^2} \times \dfrac{16y}{3x}$ (ဌ) $\dfrac{p^2}{p^2-q^2} \times \dfrac{p+q}{p-q} \div \dfrac{p}{(p-q)^2}$

(ဃ) $\dfrac{x}{x+3} \div \dfrac{3x^2}{3x+9} \times \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-9}$

(ပ) $\dfrac{2y-1}{4y^2} \div \dfrac{4y+2}{y^3} \times \dfrac{4y^2+4y+1}{4y^2-1}$

(ဏ) $\dfrac{x^2+9x+14}{x^2-3x} \times \dfrac{2x^2+2x}{x^2+6x-7} \div \dfrac{x+2}{x-3}$

၄။ $P = \dfrac{x}{x+1}$, $Q = \dfrac{1}{x}$ ဖြစ်လျှင် အောက်ပါတို့ကို ရှာပါ။

(က) $P + Q$ (ခ) $P - Q$ (ဂ) $P \times Q$ (ဃ) $P \div Q$

၅။ အောက်ပါတို့ကိုရှင်းပါ။

(က) $\dfrac{\dfrac{y^2-9}{y}}{y+3}$

(ခ) $\dfrac{\dfrac{x+3}{x-3}}{\dfrac{3x+9}{x^2-9}}$

(ဂ) $\dfrac{\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{x-y}}{x^2+y^2}$

(ဃ) $\dfrac{\dfrac{1}{d} + \dfrac{2}{c}}{\dfrac{6c+12d}{dc}}$

(င) $\dfrac{a - \dfrac{a^2}{a+b}}{b - \dfrac{b^2}{a+b}}$

(စ) $\dfrac{\dfrac{3y^2-10y+3}{3y^2+5y-2} \times \dfrac{2y^2-3y-20}{2y^2-y-15}}{y-4}$

အခန်း ၆ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများပါသောညီမျှခြင်းများ

ယခုသင်ခန်းစာတွင် မသိကိန်းတစ်လုံးပါသော ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းညီမျှခြင်းများ ဖြေရှင်းခြင်းနှင့် မသိကိန်းနှစ်လုံးပါသော ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းတစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းများ ဖြေရှင်းခြင်းတို့ကို လေ့လာကြရမည်။

ဤသင်ခန်းစာကို သင်ကြားပြီးပါက လူမှုဘဝနှင့်သက်ဆိုင်သော ဉာဏ်စမ်းပုစ္ဆာများကို ကောင်းစွာနားလည်ဖြေရှင်းနိုင်မည် ဖြစ်သည်။

၆.၁ မသိကိန်းတစ်လုံးပါညီမျှခြင်းများ

မသိကိန်းတစ်လုံးပါ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းညီမျှခြင်းများ ဖြေရှင်းရာတွင်

(က) ညီမျှခြင်းတစ်ဖက်စီတွင် အပိုင်းကိန်းတစ်ခုစီသာပါရှိလျှင် ကြက်ခြေခတ်မြှောက်ခြင်းနည်းဖြင့် ဖြေရှင်းနိုင်သည်။

(ခ) ညီမျှခြင်းတစ်ဖက်စီတွင် အပိုင်းကိန်းတစ်ခုထက်ပိုပါခဲ့လျှင် ညီမျှခြင်း၏ လက်ဝဲဘက်နှင့် လက်ယာဘက်တွင်ရှိသော ပိုင်းခြေများ၏ အငယ်ဆုံးဘုံဆတိုးကိန်းဖြင့်ညီမျှခြင်း၏ နှစ်ဖက်စလုံးကိုမြှောက်၍ ဖြေရှင်းနိုင်သည်။

ဥပမာ ၁။ $\dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2}{x+4}$ ကို ဖြေရှင်းပါ။

ညီမျှခြင်းတစ်ဖက်စီတွင် အပိုင်းကိန်းတစ်ခုစီသာရှိသောကြောင့် ကြက်ခြေခတ်မြှောက်ခြင်းနည်းကို သုံး၍ ဖြေရှင်းမည်။

$$\begin{aligned}
\frac{3}{x+1} &= \frac{2}{x+4}\\
3(x+4) &= 2(x+1)\\
3x+12 &= 2x+2\\
3x-2x &= 2-12\\
x &= -10
\end{aligned}$$

ဥပမာ ၂။ $\dfrac{3(y-1)}{y^2-8y+15} = \dfrac{y+2}{y-5} - \dfrac{y+3}{y-3}$ ကို ဖြေရှင်းပါ။

$$\frac{3(y-1)}{y^2-8y+15} = \frac{y+2}{y-5} - \frac{y+3}{y-3}$$

လက်ဝဲဘက်၏ပိုင်းခြေကို ဆခွဲကိန်းခွဲပြီး အစားသွင်းသော်

$$\frac{3(y-1)}{(y-5)(y-3)} = \frac{y+2}{y-5} - \frac{y+3}{y-3}$$

ကို ရသည်။

ညီမျှခြင်းနှစ်ဖက်စလုံးကို ပိုင်းခြေ၏အငယ်ဆုံးဘုံဆတိုးကိန်း $(y-5)(y-3)$ ဖြင့် မြှောက်မည်။

$$\frac{3(y-1)}{(y-5)(y-3)}\times(y-5)(y-3) = \frac{y+2}{y-5}\times(y-5)(y-3) - \frac{y+3}{y-3}\times(y-5)(y-3)$$

$$\begin{aligned} 3(y-1) &= (y+2)(y-3)-(y+3)(y-5) \\ 3y-3 &= (y^2-y-6)-(y^2-2y-15) \\ 3y-3 &= y+9 \\ 2y &= 12 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၆.၁

၁။ အောက်ပါတို့ကို ဖြေရှင်းပါ။

(က) $\frac{3}{2x} = \frac{4}{x-1}$

(ခ) $\frac{1-3x}{x^2}+\frac{3}{2x} = \frac{4}{x}$

(ဂ) $\frac{6}{k} - \frac{1}{k^2+6k} = \frac{1}{k}$

(ဃ) $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{x-3} = \frac{5}{(x+2)(x-3)}$

(င) $\frac{4}{n+1} + \frac{1}{n^2-5n-6} = \frac{1}{n-6}$

(စ) $\frac{5}{p+6} - \frac{1}{p^2+6p} = \frac{2}{p^2+6p}$

(ဆ) $\frac{1}{2v} = \frac{5v+15}{v^2-6v} - \frac{v+6}{2v^2-12v}$

(ဇ) $\frac{6}{x+1} = \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+2}$

(ဈ) $\frac{12r^2-10r+14}{4r^2-2r+10} = 3$

(ည) $\frac{9}{a+5} - \frac{3}{a+4} = \frac{6}{a+6}$

၆.၂ ညာဏ်စမ်းပုစ္ဆာများ

ဥပမာ ၁။ အပိုင်းကိန်းတစ်ခု၏ ပိုင်းဝေသည် 1 ဖြစ်၏။ ပိုင်းခြေမှ 4 နုတ်၍ရသော အပိုင်းကိန်းအသစ်သည် ပိုင်းဝေတွင် 2 ပေါင်း၍ရသော အပိုင်းကိန်းနှင့် ညီလျှင် မူလအပိုင်းကိန်းကို ရှာပါ။

မူလအပိုင်းကိန်း၏ပိုင်းခြေ $= x$ ဖြစ်ပါစေ။

မူလအပိုင်းကိန်း $= \dfrac{1}{x}$

မူလအပိုင်းကိန်း၏ပိုင်းခြေတွင် 4 နုတ်သော် $= \dfrac{1}{x-4}$

မူလအပိုင်းကိန်း၏ပိုင်းဝေတွင် 2 ပေါင်းသော် $= \dfrac{3}{x}$

ပုစ္ဆာအရ

$$\frac{1}{x-4} = \frac{3}{x}$$

ဖြစ်သည်။

ကြက်ခြေခတ်မြှောက်ခြင်းနည်းကို အသုံးပြု၍ ဖြေရှင်းမည်။

$$\begin{aligned} 3(x-4) &= x \\ 3x-12 &= x \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

ထို့ကြောင့် မူလ အပိုင်းကိန်းသည် $\dfrac{1}{6}$ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၂။ စက်လှေတစ်စီးသည် ချောင်းတစ်ခုအတွင်း ခုတ်မောင်းရာ ရေဆန်တွင် 5 မိုင် ခရီးမောင်းနိုင်သည့် အချိန်အတွင်း ရေစုန်၌ 9 မိုင်ခရီးမောင်းနိုင်၏။ ထိုချောင်း၏ ရေစီးနှုန်း မှာ တစ်နာရီ 2 မိုင်ဖြစ်လျှင် ရေငြိမ်၌ ထိုစက်လှေသည် တစ်နာရီမိုင်မည်မျှ ခုတ်မောင်း နိုင်သနည်း။

စက်လှေသည် ရေငြိမ်တွင် တစ်နာရီ x မိုင် သွားနိုင်သည် ဆိုပါစို့။

ချောင်း၏ရေစီးနှုန်းမှာ တစ်နာရီ 2 မိုင်ဖြစ်သည့်အတွက်
စက်လှေ၏ သွားနှုန်းမှာ ရေဆန်တွင် တစ်နာရီ $(x-2)$ မိုင် ဖြစ်၍ ရေစုန်တွင် တစ်နာရီ $(x+2)$ မိုင် ဖြစ်သည်။

ရေဆန် 5 မိုင်ခရီးအတွက် ကြာချိန် $= \dfrac{5}{x-2}$ နာရီ

ရေစုန် 9 မိုင်ခရီးအတွက် ကြာချိန် $= \dfrac{9}{x+2}$ နာရီ

ပုစ္ဆာအရ

$$\frac{5}{x-2} = \frac{9}{x+2}$$

ဖြစ်သည်။

$$\begin{aligned} \therefore\quad 5(x+2) &= 9(x-2) \\ 5x+10 &= 9x-18 \\ 4x &= 28 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

ထို့ကြောင့် ရေငြိမ်၌ စက်လှေသည် တစ်နာရီ 7 မိုင် ခုတ်မောင်းနိုင်သည်။

ဥပမာ ၃။ မောင်ထွန်းသည် လယ်တစ်ကွက်ကို ရိတ်ရန် 24 နာရီ ကြာ၏။ ထိုလယ်ကွက်ကို မောင်ခင်က ကူ၍ရိတ်သောအခါ 15 နာရီကြာ၏။ မောင်ခင်တစ်ယောက်တည်းသာ ထိုလယ်ကွက်ကို ရိတ်ပါက အချိန်မည်မျှ ကြာမည်နည်း။

မောင်ထွန်းတစ်ယောက်တည်း လယ်တစ်ကွက်ကို ရိတ်လျှင် 24 နာရီ ကြာသည်။
မောင်ထွန်းသည် အချိန် 1 နာရီရိတ်လျှင် ထိုလယ်ကွက်၏ $\dfrac{1}{24}$ ကို ရိတ်နိုင်မည်။
မောင်ခင်တစ်ယောက်တည်းသာ ထိုလယ်ကွက်ကိုရိတ်ပါက ကြာမည့်အချိန်သည် x နာရီ ဖြစ်ပါစေ။

မောင်ခင်သည် အချိန် 1 နာရီရိတ်လျှင် ထိုလယ်ကွက်၏ $\dfrac{1}{x}$ ကို ရိတ်နိုင်မည်။
ထို့ကြောင့် မောင်ထွန်းနှင့် မောင်ခင်တို့ နှစ်ယောက်အတူ အချိန် 1 နာရီ ရိတ်လျှင် ထိုလယ်ကွက်၏ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{24}$ ကို ရိတ်နိုင်မည်။

ပုစ္ဆာအရ
သူတို့နှစ်ဦးပေါင်းသည် 15 နာရီရိတ်လျှင် လယ်တစ်ကွက်လုံးရိတ်၍ ပြီးသည်။

$$\therefore \quad 15\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{24}\right) = 1$$

$$\frac{15}{x} + \frac{15}{24} = 1$$

$$\frac{15}{x} = 1 - \frac{15}{24}$$

$$\frac{15}{x} = \frac{9}{24}$$

$$9x = 360$$

$$x = 40$$

ထို့ကြောင့် မောင်ခင်တစ်ယောက်တည်းသာ ထိုလယ်ကွက်ကို ရိတ်ပါက အချိန် 40 နာရီ ကြာမည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၆.၂

၁။ အပိုင်းကိန်းတစ်ခု၏ ပိုင်းခြေသည် ပိုင်းဝေထက် 4 ကြီး၏။ ပိုင်းဝေနှင့် ပိုင်းခြေ နှစ်ခုစလုံးမှ 5 နုတ်၍ ရသော အပိုင်းကိန်းအသစ်သည် $\frac{1}{3}$ ဖြစ်၏။ မူလအပိုင်းကိန်းကို ရှာပါ။

၂။ မောင်ပိုသည် ရေစီးလျက်ရှိသော မြစ်တစ်ခုတွင် ရေကူးကျင့်ရာ ရေစုန် 1 မိုင် ကူးပြီး နောက်လှည့်၍ ရေဆန်ပြန်ကူးလာရာ ရေစုန် 1 မိုင် ကူး၍ကြာသောအချိန်တွင် ရေဆန် 0.5 မိုင် သာရောက်ခဲ့၏။ သူသည် ရေငြိမ်တွင် တစ်နာရီ 1.5 မိုင် ကူးနိုင်လျှင် ရေစီးနှုန်းကို ရှာပါ။

၃။ လေယာဉ်ပျံတစ်စီးသည် အရှေ့မြောက် 430 မိုင်ကွာဝေးသော အရပ်သို့ ပျံသန်းသွား၏။ ထိုအချိန်၌ အနောက်တောင်လေတိုက်လျက်ရှိ၏။ အပြန်ခရီး၌လည်း လေသည် မူလ အတိုင်းပင်ဆက်၍ တိုက်လျက်ရှိသည်။ အသွားခရီးအတွက် ကြာသောအချိန်အတွင်း အပြန် ခရီး၌ 370 မိုင်သာ ရောက်သည်ကိုတွေ့ရ၏။ လေယာဉ်ပျံသည် လေငြိမ်နေစဉ် တစ်နာရီ 200 မိုင်နှုန်း ပျံသန်းနိုင်သော် လေတိုက်နှုန်းကို ရှာပါ။

၄။ လေယာဉ်ပျံတစ်စီးသည် လေစုန်၌ 530 မိုင် ပျံသည့် အချိန်တွင် လေဆန်၌ 430 မိုင် ပျံနိုင်၏။ လေယာဉ်၏ပျံသန်းနှုန်းသည် တစ်နာရီ 240 မိုင် ဖြစ်သော် လေတိုက်နှုန်းကို ရှာပါ။

၅။ ကွန်ပျူတာ စာရိုက်ရာတွင် စုစုသည် ရီရီထက် တစ်မိနစ်လျှင် စာလုံးရေ 35 လုံးပို၍ ရိုက်နိုင်သည်။ စာလုံးရေ 675 ပါသော စာပိုဒ်တစ်စုကို ရီရီရိုက်ရန် ကြာသောအချိန်တွင် စုစုသည် စာလုံးရေ 1200 ကို ရိုက်နိုင်၏။ သူတို့တစ်ဦးစီ၏ တစ်မိနစ်တွင် ရိုက်နိုင်သော နှုန်းကို ရှာပါ။

၆။ လှည်းနှစ်စီးရှိရာ ပထမလှည်း၏ဘီးအဝန်းသည် ဒုတိယလှည်း၏ဘီးအဝန်းထက် 6 ပေပို၏။ ပထမလှည်းသည် 4.8 မိုင်သွားရာ၌ ဘီးလည်သောအပတ်ပေါင်းသည် ဒုတိယလှည်း 3.0 မိုင် သွားရာ၌ ဘီးလည်သောအပတ်ပေါင်းနှင့် ညီ၏။ လှည်းနှစ်စီးတို့၏ ဘီးအဝန်းများကို ရှာပါ။

၇။ လေယာဉ်ပျံတစ်စီးသွားနှုန်းသည် မီးရထားတစ်စီးသွားနှုန်း၏ 5 ဆ ဖြစ်၏။ ယင်း လေယာဉ်ပျံဖြင့် 375 မိုင် သွားလျှင် မီးရထားဖြင့် 95 မိုင် သွားသည့် အချိန်ထက် 98 မိနစ် စောရောက်၏။ မီးရထားနှင့် လေယာဉ်ပျံတို့၏ သွားနှုန်းအသီးသီးကို ရှာပါ။

၈။ မီးရထားတစ်စီးသွားနှုန်းသည် ရေလမ်းမှ သင်္ဘောတစ်စီးသွားနှုန်းထက် တစ်နာရီလျှင် 20 မိုင် ပို၏။ သင်္ဘောဖြင့် 45 မိုင် သွားနိုင်သည့်အချိန်အတွင်း မီးရထားသည် 135 မိုင် သွားနိုင်၏။ မီးရထားနှင့်သင်္ဘောတို့၏ တစ်နာရီသွားနှုန်းများကိုရှာပါ။

၉။ မောင်နီနှင့်မောင်ထွေးတို့နှစ်ယောက် အတူရေတွင်းတူးကြရာ ပြီးရန် 8 ရက်ကြာ၏။ ထို ရေတွင်းကို မောင်ထွေးတစ်ယောက်တည်းတူးလျှင် 12 ရက်ကြာမှ ပြီးမည်ဖြစ်၏။ မောင်နီ တစ်ယောက်တည်းတူးလျှင် ပြီးရန်ရက်ပေါင်းမည်မျှကြာမည်နည်း။

၁၀။ သားအဖနှစ်ယောက်သည် လယ်တစ်ကွက်ကိုရိတ်ကြရာပြီးရန် 2 ရက်ကြာ၏။ အဖ၏ လုပ်အားသည် သား၏လုပ်အားနှစ်ဆဖြစ်လျှင် တစ်ယောက်စီ ထိုလယ်ကို ရိတ်ပါက ပြီးရန် ရက်မည်မျှစီ ကြာမည်နည်း။

၆.၃ မသိကိန်းနှစ်လုံးပါ တစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းများ

မသိကိန်းနှစ်လုံးပါ ရာရှင်နယ်ကိန်းတန်းများ၏ တစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းများ ဖြေရှင်းရာ တွင် မသိကိန်းနှစ်လုံးပါ တစ်ပြိုင်နက်တစ်ထပ်ညီမျှခြင်းများအဖြစ် ပြောင်းလဲပြီး ကိန်းချေနည်းနှင့် ကိန်းအစားသွင်းနည်းတို့ဖြင့် ဖြေရှင်းနိုင်သည်။

ဥပမာ ၁။ အောက်ပါ ရာရှင်နယ်ကိန်းများ၏ တစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းများကို ဖြေရှင်းပါ။

$$\left.\begin{aligned} \frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{2} &= 3 \\ \frac{x}{3}-\frac{y}{2} &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{2} = 3 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{3} \ldots\ldots (2)$$

ညီမျှခြင်း (1) ၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို 6 ဖြင့် မြှောက်ပါ။

$$2(x+y)+3(x-y) = 18$$
$$2x+2y+3x-3y = 18$$
$$5x - y = 18 \quad \ldots\ldots (3)$$

ညီမျှခြင်း (2) ၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို 6 ဖြင့် မြှောက်ပါ။

$$2x - 3y = 2 \quad \ldots\ldots (4)$$

ညီမျှခြင်း (3) နှင့် (4) တို့ကို ဖြေရှင်းမည်။

$15x - 3y = 54$ (ညီမျှခြင်း (3) ၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို 3 ဖြင့် မြှောက်ခြင်း)

$2x - 3y = 2$

$13x = 52$ (ညီမျှခြင်းနှစ်ခုကို နုတ်ခြင်း)

$x = 4$

$x = 4$ ကို ညီမျှခြင်း (3) တွင် အစားသွင်းပါ။

$$(5\times 4) - y = 18$$
$$y = 2$$
$$\therefore\ x = 4, y = 2$$

ဥပမာ ၂။ အောက်ပါ ရာရှင်နယ်ကိန်းများ၏ တစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းများကို ဖြေရှင်းပါ။

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{x}-\frac{9}{y} &= -1 \\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y} &= 3\frac{1}{6} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{4}{x} - \frac{9}{y} = -1 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 3\frac{1}{6} \quad \ldots\ldots (2)$$

$\frac{1}{x} = p$, $\frac{1}{y} = q$ ဟုထားပါ။ ထိုအခါ

$$4p - 9q = -1 \quad \ldots\ldots (3)$$

$$3p + 5q = \frac{19}{6} \quad \ldots\ldots (4)$$

တို့ကို ရသည်။

ညီမျှခြင်း (3) နှင့် (4) တို့ကို ဖြေရှင်းမည်။

$20p - 45q = -5$ (ညီမျှခြင်း (3) ၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို 5 ဖြင့် မြှောက်ခြင်း)

$27p + 45q = \frac{57}{2}$ (ညီမျှခြင်း (4) ၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို 9 ဖြင့် မြှောက်ခြင်း)

$47p = \frac{47}{2}$ (ညီမျှခြင်းနှစ်ခုကို ပေါင်းခြင်း)

$$p = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad x = 2$$

$p = \frac{1}{2}$ ကို ညီမျှခြင်း (3) တွင် အစားသွင်းပါ။

$$\left(4 \times \frac{1}{2}\right) - 9q = -1$$

$$9q = 3$$

$$q = \frac{1}{3}$$

$$y = 3$$

$$\therefore \ x = 2, \ y = 3$$

ဥပမာ ၃။ အောက်ပါ ရာရှင်နယ်ကိန်းများ၏ တစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းများကို ဖြေရှင်းပါ။

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3x} - \frac{1}{7y} &= \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2x} - \frac{1}{3y} &= \frac{1}{6} \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{1}{3x} - \frac{1}{7y} = \frac{2}{3} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{3y} = \frac{1}{6} \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{1}{6x} - \frac{1}{14y} = \frac{2}{6}$$ (ညီမျှခြင်း (1) ၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို $\frac{1}{2}$ ဖြင့် မြှောက်ခြင်း)

$$\frac{1}{6x} - \frac{1}{9y} = \frac{1}{18}$$ (ညီမျှခြင်း (2) ၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို $\frac{1}{3}$ ဖြင့် မြှောက်ခြင်း)

$$-\frac{1}{14y} - \left(-\frac{1}{9y}\right) = \frac{2}{6} - \frac{1}{18}$$ (ညီမျှခြင်းနှစ်ခုကို နုတ်ခြင်း)

$$\frac{5}{126y} = \frac{5}{18}$$

$$126y = 18$$

$$y = \frac{1}{7}$$

$y = \frac{1}{7}$ ကို ညီမျှခြင်း (1) တွင် အစားသွင်းပါ။

$$\frac{1}{3x} = \frac{2}{3} + 1$$

$$\frac{1}{3x} = \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{5},\ y = \frac{1}{7}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၆.၃

၁။ အောက်ပါ တစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းတို့ကို ဖြေရှင်းပါ။

(က) $\left.\begin{aligned} \frac{x+y}{2}-\frac{2x+y}{7}&=5 \\ x&=\frac{2y-7}{3} \end{aligned}\right\}$

(ခ) $\left.\begin{aligned} \frac{9}{x}-\frac{4}{y}&=1 \\ \frac{9}{x}+\frac{10}{y}&=8 \end{aligned}\right\}$

(ဂ) $\left.\begin{aligned} \frac{11}{x}-\frac{7}{y}&=37 \\ \frac{8}{x}+\frac{9}{y}&=41 \end{aligned}\right\}$

(ဃ) $\left.\begin{aligned} \frac{x-7}{5}-\frac{y-15}{5}&=4 \\ \frac{x+y}{7}+\frac{y-x}{6}&=3 \end{aligned}\right\}$

(င) $\left.\begin{aligned} \frac{a-b}{4}+\frac{a+b}{3}&=3 \\ \frac{a+3b}{8}-\frac{a-3b}{4}&=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}$

(စ) $\left.\begin{aligned} x+\frac{3y+1}{5}&=4 \\ 5x-\frac{y-1}{2}&=9 \end{aligned}\right\}$

(ဆ) $\left.\begin{aligned} \frac{8}{x}+\frac{9}{y}&=5 \\ \frac{12}{x}-\frac{6}{y}&=1 \end{aligned}\right\}$

(ဇ) $\left.\begin{aligned} \frac{20}{x}&=\frac{12}{y} \\ \frac{15}{x}+\frac{18}{y}&=9 \end{aligned}\right\}$

(ဈ) $\left.\begin{aligned} \frac{4}{a+1}+\frac{5}{b+1}&=2 \\ \frac{2}{a+1}+\frac{1}{2b+2}&=\frac{1}{3} \end{aligned}\right\}$

(ည) $\left.\begin{aligned} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}&=4 \\ \frac{y}{4}-\frac{x}{3}&=\frac{1}{6} \end{aligned}\right\}$

၆.၄ မသိကိန်းနှစ်လုံးပါ တစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းများနှင့်သက်ဆိုင်သောဉာဏ်စမ်း ပုစ္ဆာများ

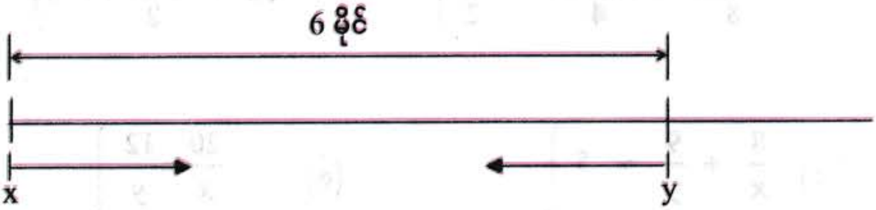
ဥပမာ ၁။ လူနှစ်ယောက်သည် လမ်းမကြီးပေါ်ရှိ 6 မိုင် ကွာဝေးသောနေရာ နှစ်နေရာမှ သွားနှုန်းမှန်မှန်ဖြင့် မျက်နှာချင်းဆိုင် တစ်ပြိုင်နက် စထွက်ခဲ့ကြ၏။ တစ်ယောက်နှင့် တစ်ယောက် 48 မိနစ်အကြာ၌ ဆုံ၏။ မူလနေရာအကွာအဝေးမှပင် တစ်ဖက်တည်းသို့ မျက်နှာမူ၍ နှေးသောသူနောက် မြန်သောသူအမီလိုက်ပါက လိုက်သောသူသည် ရှေ့မှသွားသူအား 4 နာရီကြာမှ မီနိုင်၏။ ၎င်းတို့နှစ်ဦး၏ သွားနှုန်း အသီးသီးကို ရှာပါ။

ပုစ္ဆာအရ

ခရီးအကွာအဝေး = 6 မိုင်

မျက်နှာချင်းဆိုင်လာလျှင် $\frac{48}{60}$ နာရီတွင် ဆုံ၏။

တစ်ဖက်တည်းသွားလျှင် 4 နာရီ ကြာမှ မြန်သောသူက မီ၏။



မျက်နှာချင်းဆိုင် သွားခြင်း

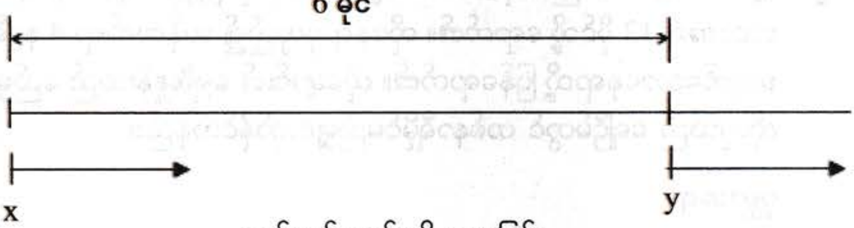
မြန်သောသူ၏သွားနှုန်း = x မိုင်/နာရီ

နှေးသောသူ၏သွားနှုန်း = y မိုင်/နာရီ

မျက်နှာချင်းဆိုင်လာသောအခါ တစ်ဦးနှင့်တစ်ဦး ချဉ်းကပ်နှုန်း $= (x + y)$ မိုင်/နာရီ

$\frac{48}{60}$ နာရီအကြာတွင် တွေ့ဆုံ၏။

$$\therefore \quad \frac{48}{60}(x + y) = 6 \qquad \ldots\ldots (1)$$



တစ်ဖက်တည်းသို့ သွားခြင်း

တစ်ဖက်တည်းသို့သွားသောအခါ တစ်ဦးနှင့်တစ်ဦး ချဉ်းကပ်နှုန်း $= (x - y)$ မိုင်/နာရီ

4 နာရီ ကြာသောအခါ မြန်သောသူက နှေးသောသူကို မီ၏။

$4(x - y)$ မိုင် $=$ မူလ တစ်ဦးနှင့်တစ်ဦး အကွာအဝေး

$\therefore \quad 4(x - y) = 6 \quad \ldots\ldots (2)$

ညီမျှခြင်း (1) နှင့် (2) တို့ကို ဖြေရှင်းမည်။

$x + y = \dfrac{15}{2}$ ……(3) (ညီမျှခြင်း (1) ၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို $\dfrac{48}{60}$ ဖြင့် စားခြင်း)

$x - y = \dfrac{3}{2}$ …… (4) (ညီမျှခြင်း (2) ၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို 4 ဖြင့် စားခြင်း)

$2x = \dfrac{18}{2}$ (ညီမျှခြင်းနှစ်ခုကို ပေါင်းခြင်း)

$x = 4\dfrac{1}{2}$

ညီမျှခြင်း (3)တွင် $x = 4\dfrac{1}{2}$ ကို အစားသွင်းပါ။

$4\dfrac{1}{2} + y = \dfrac{15}{2}$

$y = 3$

$\therefore$ မြန်သောသူ၏ သွားနှုန်း $= 4\dfrac{1}{2}$ မိုင်/နာရီ

နှေးသောသူ၏ သွားနှုန်း $= 3$ မိုင်/နာရီ

ဥပမာ ၂။ လူတစ်ယောက်သည် ရေစီးသော ချောင်းတစ်ခုကို စုန်ဆင်းရာ 1 နာရီ 30 မိနစ် ကြာသောအခါ 12 မိုင်သို့ ရောက်၏။ ထိုနေရာမှလှည့်၍ ဆန်တက်ရာ 4 နာရီအကြာ တွင် စထွက်သောနေရာသို့ ပြန်ရောက်၏။ ထိုချောင်း၏ ရေစီးနှုန်းသည် မည်မျှဖြစ်သနည်း။ ထိုလူသည် ရေငြိမ်တွင် တစ်နာရီမိုင်မည်မျှလှော်နိုင်သနည်း။

ပုစ္ဆာအရ

ရေစုန် $1\frac{1}{2}$ နာရီတွင် 12 မိုင် ရောက်သည်။

ရေဆန် 4 နာရီတွင် 12 မိုင်သို့ ရောက်သည်။

ရေစီးနှုန်း $=$ x မိုင်/နာရီ

ရေငြိမ်တွင်လှေလှော်နှုန်း $=$ y မိုင်/နာရီ

ရေဆန်သွားနှုန်း $=$ $(y - x)$မိုင်/နာရီ

ရေစုန်သွားနှုန်း $=$ $(x + y)$ မိုင်/နာရီ

ရေစုန်တွင် $1\frac{1}{2}$ နာရီ သွားသောအခါ 12 မိုင် ရောက်၏။

$$1\frac{1}{2}(y + x) = 12 \quad \text{...... (1)}$$

ရေဆန်တွင် 4 နာရီ သွားသောအခါ 12 မိုင် ရောက်၏။

$$4(y - x) = 12 \quad \text{...... (2)}$$

ညီမျှခြင်း (1) နှင့် (2) တို့ကို ဖြေရှင်းမည်။

$y + x = 8$ (ညီမျှခြင်း (1) ၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို $1\frac{1}{2}$ ဖြင့် မြှောက်ခြင်း)

$y - x = 3$ (ညီမျှခြင်း (2) ၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို 4 ဖြင့် စားခြင်း)

$2y = 11$ (ညီမျှခြင်းနှစ်ခုကို ပေါင်းခြင်း)

$$y = 5\frac{1}{2}$$

ညီမျှခြင်း (2)တွင် $y = 5\frac{1}{2}$ ကို အစားသွင်းပါ။

$$5\frac{1}{2} - x = 3$$
$$-x = 3 - 5\frac{1}{2}$$
$$x = 2\frac{1}{2}$$

$\therefore$ ရေစီးနှုန်း = $2\frac{1}{2}$ မိုင်/နာရီ

လှေလှော်နှုန်း = $5\frac{1}{2}$ မိုင်/နာရီ

ဥပမာ ၃။ စခန်းနှစ်ခု A နှင့် B တို့အကြားရှိ ခရီးအချို့မှာမြေပြန့်၊ အချို့မှာတောင်တက်၊ အချို့မှာ တောင်ဆင်းဖြစ်၏။ မြေပြန့်ခရီးသည် ခရီးတစ်ခုလုံး၏ တစ်ဝက်ဖြစ်၏။ မောင်စိန်သည် A မှ B သို့သွားရာ 2 နာရီ 40 မိနစ် ကြာ၏။ တစ်ဖန် B မှ A သို့ ပြန်လာရာ 2 နာရီတိတိ ကြာ၏။ အသွားအပြန်ခရီးနှစ်ခုလုံး၌ သူ၏ သွားနှုန်းများမှာ မြေပြန့်တွင် တစ်နာရီ 4 မိုင်၊ တောင်တက်တွင် 2 မိုင်၊ တောင်ဆင်းတွင် 6 မိုင် ဖြစ်လျှင် ခရီးတစ်ပိုင်းစီ၏ အကွာအဝေးမိုင်မည်မျှစီ ရှိသနည်း။

ပုစ္ဆာအရ

(1) မြေပြန့်ခရီး = ခရီးတစ်ခုလုံး၏ တစ်ဝက်

(2) A မှ B သို့ ကြာချိန် = $2\frac{2}{3}$ နာရီ

(3) B မှ A သို့ ကြာချိန် = 2 နာရီ

(4) မြေပြန့်နှုန်း = 4 မိုင်/နာရီ

(5) တောင်တက်နှုန်း = 2 မိုင်/နာရီ

(6) တောင်ဆင်းနှုန်း = 6 မိုင်/နာရီ

မြေပြန့်ခရီး = x မိုင် ဖြစ်ပါစေ။

တောင်တက်ခရီး = y မိုင် ဖြစ်ပါစေ။

(1) အရ တောင်တက်ခရီး + တောင်ဆင်းခရီး = မြေပြန့်ခရီး

ထို့ကြောင့်

တောင်ဆင်းခရီး = $x - y$ မိုင် ဖြစ်သည်။

$$\therefore \text{ အသွားခရီးကြာချိန် } \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{x-y}{6} = 2\frac{2}{3} \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{အပြန်ခရီးကြာချိန် } \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{x-y}{2} = 2 \qquad \ldots\ldots (2)$$

ဤတွင် အသွားခရီးအတွက် တောင်တက်ခရီးမှာ အပြန်ခရီးအတွက် တောင်ဆင်းခရီးဖြစ်၍ အသွားခရီးအတွက် တောင်ဆင်းခရီးမှာ အပြန်ခရီးအတွက် တောင်တက်ခရီးဖြစ်ကြောင်း သတိပြုပါ။

ညီမျှခြင်း (1) နှင့် (2) တို့ကို ဖြေရှင်းမည်။

$5x + 4y = 32$ …(3) (ညီမျှခြင်း (1) ၏နှစ်ဖက်စလုံးကို 12 ဖြင့် မြှောက်ခြင်း)

$9x - 4y = 24$ …(4) (ညီမျှခြင်း (2) ၏နှစ်ဖက်စလုံးကို 12 ဖြင့် မြှောက်ခြင်း)

$14x = 56$ (ညီမျှခြင်းနှစ်ခုကို ပေါင်းခြင်း)

$x = 4$

ညီမျှခြင်း (3)တွင် $x = 4$ ကိုအစားသွင်းပါ။

$(5 \times 4) + 4y = 32$

$4y = 12$

$y = 3$

ပုစ္ဆာအရ

မြေပြန့်ခရီး = တောင်တက်ခရီး + တောင်ဆင်းခရီး

4 = 3 + တောင်ဆင်းခရီး

တောင်ဆင်းခရီး = 4 – 3 = 1 မိုင်

ထို့ကြောင့် အသွားခရီး အတွက်

မြေပြန့်ခရီး = 4 မိုင်

တောင်တက်ခရီး = 3 မိုင်

တောင်ဆင်းခရီး = 1 မိုင် ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၄။ ကိန်းနှစ်ခုခြားနားခြင်းသည် 12 ဖြစ်၏။ ယင်းတို့၏ အချိုးသည် 5 **:** 4 ဖြစ်သော် ယင်းကိန်းများကို ရှာပါ။

ပုစ္ဆာအရ

ပထမကိန်း – ဒုတိယကိန်း = 12

ပထမကိန်း **:** ဒုတိယကိန်း = 5 : 4

ပထမကိန်း = s ဖြစ်ပါစေ။

ဒုတိယကိန်း = t ဖြစ်ပါစေ။

$$s - t = 12 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{s}{t} = \frac{5}{4} \quad \ldots\ldots (2)$$

ညီမျှခြင်း (1) တွင် $s = \frac{5}{4}t$ ကို အစားသွင်းပါ။

$$\frac{5}{4}t - t = 12$$

$$\frac{t}{4} = 12$$

$$t = 48$$

ညီမျှခြင်း (2) တွင် $t = 48$ ကို အစားသွင်းပါ။

$$s = \frac{5}{4} \times 48$$

$$s = 60$$

$\therefore$ ပထမကိန်း $= 60$

ဒုတိယကိန်း $= 48$

လေ့ကျင့်ခန်း ၆.၄

၁။ လူတစ်ယောက်သည် ရေစီးသော ချောင်းတစ်ခုကို ဆန်တက်ရာ 2 နာရီ 20 မိနစ်ကြာသောအခါ ခရီး 7 မိုင်ရောက်၏။ ထိုနေရာမှ ပြန်၍စုန်ဆင်းရာ 1 နာရီအကြာတွင် စထွက်သောနေရာသို့ ပြန်ရောက်၏။ တစ်နာရီလျှင် ရေစီးနှုန်း မည်မျှဖြစ်သနည်း။ ရေငြိမ်တွင် သူသည် တစ်နာရီ မိုင်မည်မျှ လှော်နိုင်သနည်း။

၂။ သင်္ဘောတစ်စီးသည် ရန်ကုန်မှ 46 မိုင်ကွာဝေးသောမြို့သို့သွားရာ ရေစုန်ဖြစ်၍ $3\frac{5}{6}$ နာရီကြာ၏။ အကယ်၍ ရေဆန်ဖြစ်ပါက $5\frac{3}{4}$ နာရီကြာမည်ဖြစ်သော် ထိုအချိန်၌ တစ်နာရီ ရေစီးနှုန်းနှင့် ရေငြိမ်တွင် သင်္ဘော၏ပျမ်းမျှသွားနှုန်းကို ရှာပါ။

၃။ လူငယ်တစ်ဦးသည် လှေလှော်၍ မြစ်ကိုဆန်တက်ရာ 21 မိုင်ခရီးကို 7 နာရီသွားရ၏။ အပြန်တွင် ရေစုန်ဖြစ်သဖြင့် 3 နာရီသာ ကြာ၏။ရေငြိမ်တွင် သူသည် တစ်နာရီ မိုင်မည်မျှလှော်နိုင်သနည်း။ ရေစီးနှုန်း တစ်နာရီ မိုင်မည်မျှဖြစ်သနည်း။

၄။ မောင်မြသည် တောင်ကုန်းတစ်ခုကို ဖြတ်ကျော်၍ သွား၏။ အသွားတွင် တောင်တက်ခရီးမှာ 2 မိုင်၊ တောင်ဆင်းခရီးမှာ 1 မိုင်ဖြစ်၍ အချိန် 50 မိနစ်ကြာ၏။ အပြန်တွင် ထိုလမ်းအတိုင်းပြန်လာရာ 40 မိနစ်ကြာ၏။ အသွားနှင့်အပြန်တွင် သူ၏တောင်တက်နှုန်းနှင့် တောင်ဆင်းနှုန်းအသီးသီးတူညီကြလျှင် တောင်တက်နှင့်တောင်ဆင်းသွားနှုန်းများကို ရှာပါ။

၅။ ကျောင်းတစ်ကျောင်းတွင် သတ္တမတန်း၏ တန်းခွဲ A နှင့် တန်းခွဲ B ရှိ ကျောင်းသားဦးရေတို့၏ အချိုးသည် 4 : 5 ဖြစ်၏။ တန်းခွဲ A မှ ကျောင်းသား 40 ကို တန်းခွဲ Bသို့ ပြောင်းလိုက်သောအခါ ကျောင်းသားဦးရေတို့၏ အချိုးသည် 1 : 2 ဖြစ်၏။ တန်းခွဲအသီးသီးတွင် မူလက ကျောင်းသားမည်မျှစီ ရှိကြသနည်း။

၆။ အရောင်းစင်တာတစ်ခုတွင် မူလတန်ဖိုး အချိုး 3 : 4 ရှိသော ကုန်ပစ္စည်းနှစ်ခုကို အရောင်းမြှင့်တင်ရန် ထိုမူလတန်ဖိုးများမှ 3 % နှင့် 4 % သို့ အသီးသီးလျှော့ချလိုက်ရာ ထိုလျှော့ချပေးသော စုစုပေါင်းတန်ဖိုးသည် 250 ကျပ် ဖြစ်လျှင် ယင်းကုန်ပစ္စည်းနှစ်ခု၏ မူလတန်ဖိုးကို ရှာပါ။

၇။ ပန်းစိုက်ခင်းတစ်ခုတွင် နှင်းဆီပန်းပင်နှင့် ဒေလီယာပန်းပင်တို့ကို စိုက်ပျိုးထားရာ နှင်းဆီပန်းပင်သည် ဒေလီယာပန်းပင်ထက် 222 ပင် ပို၏။ ထိုပန်းပင်တို့၏ အချိုးသည် 1 : 4 ဖြစ်လျှင် နှင်းဆီပန်းပင်နှင့် ဒေလီယာပန်းပင်တို့၏ စုစုပေါင်းအရေအတွက်ကို ရှာပါ။

၈။ ကိန်းနှစ်ခု၏ခြားနားခြင်းသည် 6 ဖြစ်၏။ ယင်းကိန်းနှစ်ခု၏ အချိုးသည် 7 : 5 ဖြစ်သော် ယင်းကိန်းများကို ရှာပါ။

၉။ လုပ်သားနှစ်ယောက်သည် လုပ်အားခငွေ 14000 ကျပ်ကို ယင်းတို့၏ လုပ်အားအချိုးအရ ခွဲဝေယူကြရာ ရသောငွေများသည် 3 : 4 ဖြစ်လျှင် တစ်ယောက်မည်မျှစီရကြသနည်း။

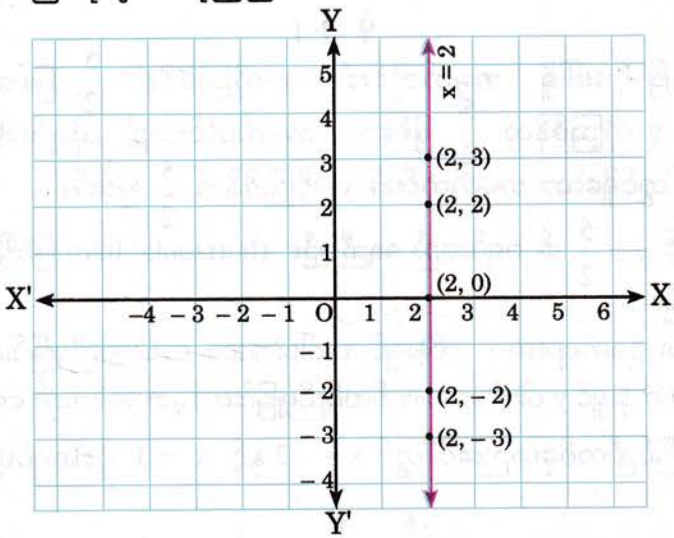
အခန်း ၇ ကိုသြဒိနိတ်ပြင်ညီတွင်ဂရပ်များဆွဲခြင်း

ကိုသြဒိနိတ်ပြင်ညီပေါ်တွင် အမှတ်များ နေရာချထားခြင်း အကြောင်းကို လေ့လာခဲ့ပြီး ဖြစ်သည်။ ဤသင်ခန်းစာတွင် ကိုသြဒိနိတ်ပြင်ညီပေါ်တွင် ဂရပ်များဆွဲခြင်းအကြောင်းကိုလေ့လာကြမည်။

၇.၁ ကိန်းရှင်တစ်ခုပါတစ်ထပ်ညီမျှခြင်းများ၏ဂရပ်

ဥပမာ ၁။ ညီမျှခြင်း $x = 2$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။

ကိုသြဒိနိတ်ပြင်ညီပေါ်တွင် x-ကိုသြဒိနိတ် 2 ရှိသောအမှတ်အချို့ (2, –3), (2, –2), (2, 0), (2, 2), (2, 3) တို့ကို နေရာချမည်။ ထိုအမှတ်များကို ဆက်ဆွဲသောအခါ မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်း ရလာမည်။ ပုံ ၇. ၁ ကိုကြည့်ပါ။



ပုံ ၇.၁

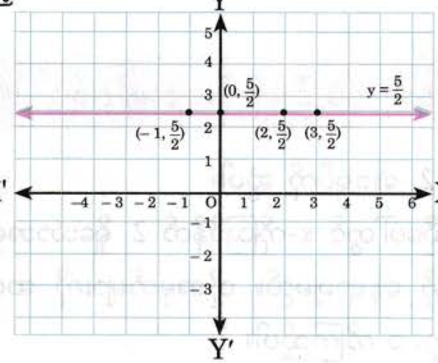
ထိုမျဉ်းဖြောင့်ပေါ်ရှိ အမှတ်တိုင်း၏ x-ကိုသြဒိနိတ်သည် 2 ဖြစ်ကြောင်း ပုံ ၇. ၁တွင် တွေ့ရသည်။

x-ကိုသြဒိနိတ် 2 ဖြစ်သော အမှတ်တိုင်းသည် ထိုမျဉ်းဖြောင့်ပေါ်တွင်ရှိပြီး ထိုမျဉ်းဖြောင့်ပေါ်တွင် ရှိသော အမှတ်တိုင်း၏ x-ကိုသြဒိနိတ်သည် 2 ဖြစ်၏။

ထို့ကြောင့် $x = 2$ ၏ ဂရပ်သည် **မတ်ရပ်မျဉ်း** (vertical line) ဖြစ်ပြီး အမှတ် (2, 0) ကို ဖြတ်သွားသည်။

ဥပမာ ၂။ ညီမျှခြင်း $y = \frac{5}{2}$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။

ကိုသြဒိနိတ်ပြင်ညီပေါ်တွင် y-ကိုသြဒိနိတ် $\frac{5}{2}$ ရှိသောအမှတ်အချို့$(-1, \frac{5}{2})$, $(0, \frac{5}{2})$, $(2, \frac{5}{2})$, $(3, \frac{5}{2})$ တို့ကို နေရာချမည်။ ထိုအမှတ်များကို ဆက်ဆွဲသောအခါ မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်း ရလာမည်။ ပုံ ၇. ၂ ကိုကြည့်ပါ။



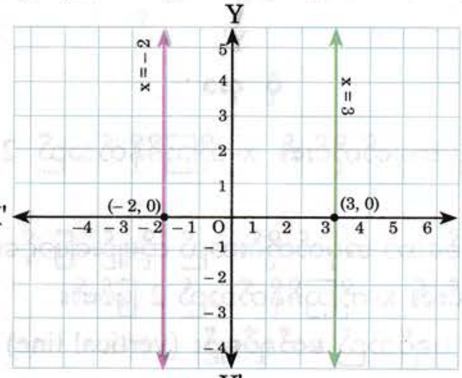
ပုံ ၇.၂

ထိုမျဉ်းဖြောင့်ပေါ်ရှိ အမှတ်တိုင်း၏ y-ကိုသြဒိနိတ် $\frac{5}{2}$ ဖြစ်ကြောင်း ပုံ ၇. ၂ တွင်တွေ့ရသည်။ y-ကိုသြဒိနိတ် $\frac{5}{2}$ ဖြစ်သော အမှတ်တိုင်းသည် ထိုမျဉ်းဖြောင့်ပေါ်တွင်ရှိပြီး ထိုမျဉ်းဖြောင့်ပေါ်တွင်ရှိသော အမှတ်တိုင်း၏ y-ကိုသြဒိနိတ် $\frac{5}{2}$ ဖြစ်၏။

ထို့ကြောင့် $y = \frac{5}{2}$ ၏ ဂရပ်သည် **ရေညီမျဉ်း** (horizontal line) ဖြစ်ပြီး အမှတ် $(0, \frac{5}{2})$ ကို ဖြတ်သွားသည်။

အထက်ပါ ဥပမာများအရ ကိန်းရှင် x ပါဝင်သော တစ်ထပ်ညီမျှခြင်းတစ်ခု၏ဂရပ်သည် မတ်ရပ်မျဉ်း ဖြစ်ပြီး ကိန်းရှင် y ပါဝင်သော တစ်ထပ်ညီမျှခြင်းတစ်ခု၏ဂရပ်သည် ရေညီမျဉ်း ဖြစ်သည်။

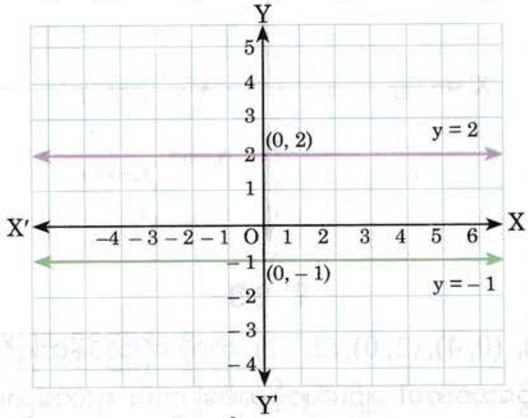
ပုံစံတွက် ၁။ ပြင်ညီတစ်ခုတည်းပေါ်တွင် $x = -2$ နှင့် $x = 3$ တို့၏ဂရပ်များကို ဆွဲပါ။



ပုံ ၇.၃

$x = -2$ ၏ဂရပ်သည် $(-2, 0)$ ကိုဖြတ်သွားသော မတ်ရပ်မျဉ်းဖြစ်ပြီး $x = 3$ ၏ ဂရပ်သည် $(3, 0)$ ကို ဖြတ်သွားသော မတ်ရပ်မျဉ်း ဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ၂။ ပြင်ညီတစ်ခုတည်းပေါ်တွင် $y = -1$ နှင့် $y = 2$ တို့၏ဂရပ်များကိုဆွဲပါ။



ပုံ ၇.၄

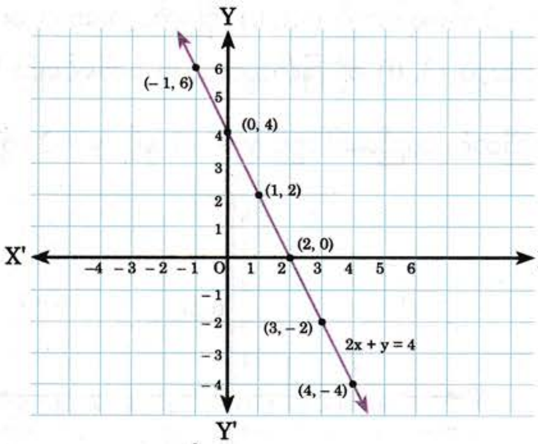
$y = -1$ ၏ဂရပ်သည် $(0, -1)$ ကိုဖြတ်သွားသော ရေညီမျဉ်းဖြစ်ပြီး $y = 2$ ၏ ဂရပ်သည် $(0, 2)$ ကို ဖြတ်သွားသော ရေညီမျဉ်း ဖြစ်သည်။

၇.၂ ကိန်းရှင်နှစ်ခုပါသောတစ်ထပ်ညီမျှခြင်းများ၏ ဂရပ်

ဥပမာ ၁။ ညီမျှခြင်း $2x + y = 4$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။

ညီမျှခြင်း $2x + y = 4$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲရန် ယင်းညီမျှခြင်းကိုပြေလည်သော x နှင့် y တို့၏ တန်ဖိုးအချို့ကို ရယူမည်။

x	−1	0	2	3
y	6	4	0	−2



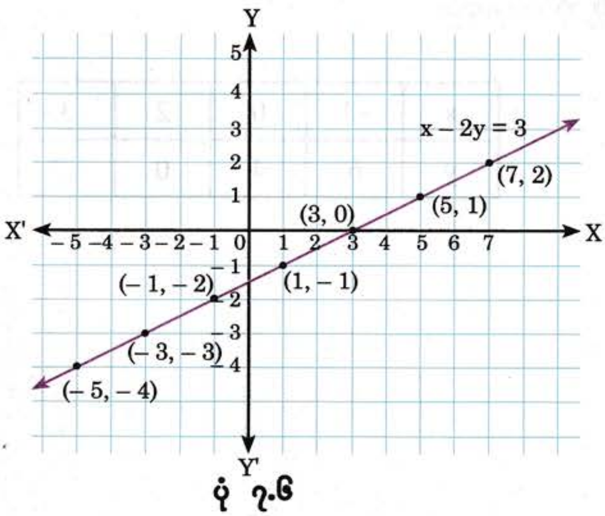
ပုံ ၇.၅

အမှတ် $(-1, 6), (0, 4), (2, 0), (3, -2)$ တို့ကို ကိုဩဒိနိတ်ပြင်ညီပေါ်တွင် နေရာချပါ။ ထိုအမှတ်များကို ဆက်ဆွဲသောအခါ မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်း ရလာမည်။ ပုံ ၇. ၅ တွင်ကြည့်ပါ။ တစ်ဖန် အမှတ် $(1, 2), (4, -4)$ တို့သည်လည်း ပုံ ၇. ၅ တွင်ဖော်ပြထားသော မျဉ်းဖြောင့်ပေါ်တွင်ရှိပြီး ညီမျှခြင်း $2x + y = 4$ ကို ပြေလည်ကြောင်း တွေ့ရသည်။ ထို့ကြောင့် အထက်ပါမျဉ်းဖြောင့်သည် ညီမျှခြင်း $2x + y = 4$ ၏ ဂရပ်ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၂။ ညီမျှခြင်း $x - 2y = 3$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။

ညီမျှခြင်း $x - 2y = 3$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲရန် ယင်းညီမျှခြင်းကိုပြေလည်သော x နှင့် y တို့၏ တန်ဖိုးအချို့ကို ရယူမည်။

x	–3	–1	1	3	5
y	–3	–2	–1	0	1



ပုံ ၇.၆

အမှတ် $(-3,-3), (-1,-2), (1,-1), (3,0), (5,1)$ တို့ကို ကိုသြဒိနိတ်ပြင်ညီပေါ်တွင် နေရာချပါ။ ထိုအမှတ်များကို ဆက်သောအခါ မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်း ရလာမည်။ ပုံ ၇. ၆ ကို ကြည့်ပါ။

တဖန် အမှတ် $(-5,-4), (7,2)$ တို့သည်လည်း ပုံ ၇. ၆ တွင်ဖော်ပြထားသောမျဉ်းဖြောင့်ပေါ်တွင်ရှိပြီး ညီမျှခြင်း $x-2y=3$ ကို ပြေလည်ကြောင်း တွေ့ရသည်။ ထို့ကြောင့် အထက်ပါ မျဉ်းဖြောင့်သည် ညီမျှခြင်း $x-2y=3$ ၏ ဂရပ်ဖြစ်သည်။

အထက်ပါဥပမာများအရ ကိန်းရှင်နှစ်ခုပါတစ်ထပ်ညီမျှခြင်းတစ်ခု၏ ဂရပ်သည် မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်းဖြစ်သည်။ မျဉ်းဖြောင့်ပေါ်တွင်ရှိသော အမှတ်နှစ်ခု၏ ကိုသြဒိနိတ်ကိုသိလျှင် ထိုမျဉ်းဖြောင့်ကို ကိုသြဒိနိတ်ပြင်ညီပေါ်တွင် ဆွဲနိုင်သည်။ ထို့ကြောင့် တစ်ထပ်ညီမျှခြင်းတစ်ခု၏ ဂရပ်ကို ဆွဲရန် ထိုညီမျှခြင်း၏ အဖြေနှစ်ခုကိုရလျှင် လုံလောက်သည်။ အဖြေနှစ်ခုမှရသော သက်ဆိုင်ရာ အမှတ်နှစ်ခုကို ကိုသြဒိနိတ်ပြင်ညီပေါ်တွင် နေရာချပြီးဆက်သွယ်ခြင်းဖြင့် ရသော မျဉ်းဖြောင့်သည် ညီမျှခြင်း၏ဂရပ် ဖြစ်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၇.၁

၁။ အောက်ပါ ညီမျှခြင်းများ၏ဂရပ်အသီးသီးကို ဆွဲပါ။

(က) $2x=3$ (ခ) $2y=-3$ (ဂ) $y=-4$ (ဃ) $3x=4$

၂။ ညီမျှခြင်း $y=-x$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။ ထိုဂရပ်မှ
$y=2$ ဖြစ်သောအခါ x ၏တန်ဖိုးကို ရှာပါ။
$x=3$ ဖြစ်သောအခါ y ၏တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

၃။ ညီမျှခြင်း $x+y=-3$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။ ထိုဂရပ်မှ
$x=-\frac{3}{2}$ ဖြစ်သောအခါ y ၏တန်ဖိုးကို ရှာပါ။
$y=-\frac{5}{2}$ ဖြစ်သောအခါ x ၏တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

၄။ အောက်ပါ ညီမျှခြင်းများ၏ဂရပ်အသီးသီးကို ဆွဲပါ။

(က) $3x+4y=6$ (ခ) $2y-3x=4$ (ဂ) $y=-2x+1$ (ဃ) $x-y+3=0$

၅။ ပြင်ညီတစ်ခုတည်းပေါ်တွင် အောက်ပါ ညီမျှခြင်းများ၏ဂရပ်များကို ဆွဲပါ။

(က) $x=5$ (ခ) $x=2$ (ဂ) $x=7$ (ဃ) $x=-5$

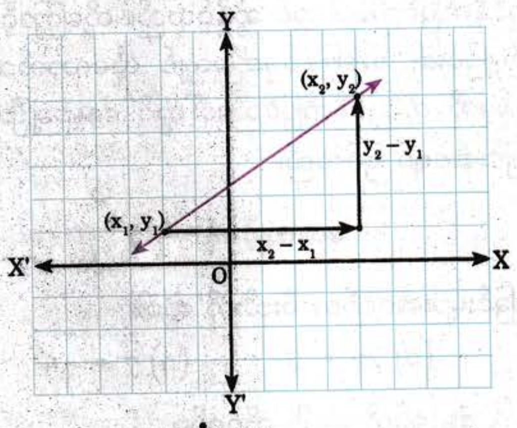
၆။ ညီမျှခြင်း $x=0$ ၏ဂရပ်ပေါ်တွင်ရှိသော အမှတ် 5 ခု၏ ကိုသြဒိနိတ်များကို ဖော်ပြပါ။

၇။ ပြင်ညီတစ်ခုတည်းပေါ်တွင် အောက်ပါ ညီမျှခြင်းများ၏ဂရပ်များကို ဆွဲပါ။
(က) $y = 2$ (ခ) $y = -3$ (ဂ) $y = 6$ (ဃ) $y = -5$

၈။ ညီမျှခြင်း $y = 0$ ၏ဂရပ်ပေါ်တွင်ရှိသော အမှတ် 5 ခု၏ ကိုဩဒိနိတ်များကို ဖော်ပြပါ။

၇.၃ မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်း၏ လျှောစောက် (Slope)

အမှတ်နှစ်ခု (x_1, y_1) နှင့် (x_2, y_2) တို့ ဆက်သောမျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်း၏ **လျှောစောက်** (slope) သည် y ပြောင်းလဲခြင်း $y_2 - y_1$ (the rise) နှင့် x ပြောင်းလဲခြင်း $x_2 - x_1$ (the run) တို့၏အချိုး ဖြစ်သည်။

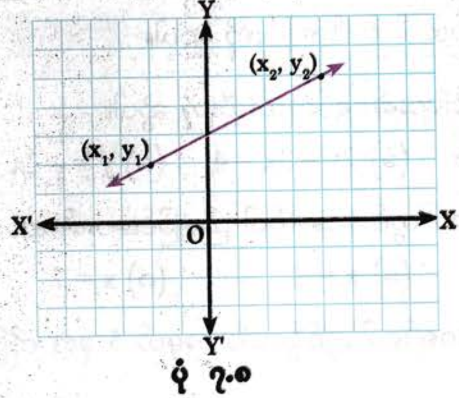


ပုံ ၇.၇

လျှောစောက်၏ ပုံသေနည်း

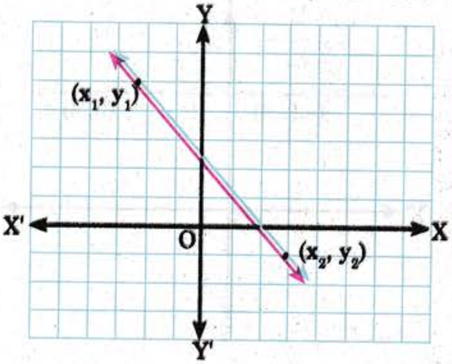
$$\text{လျှောစောက်} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

မျဉ်းတစ်လျှောက် ဘယ်မှညာသို့ သွားလျှင် x တန်ဖိုးတိုးသည်နှင့်အမျှ y တန်ဖိုး တိုးသွား၍ ယင်းမျဉ်း၏ လျှောစောက်သည် အပေါင်းဖြစ်သည်။ ပုံ ၇. ၈ ကိုကြည့်ပါ။



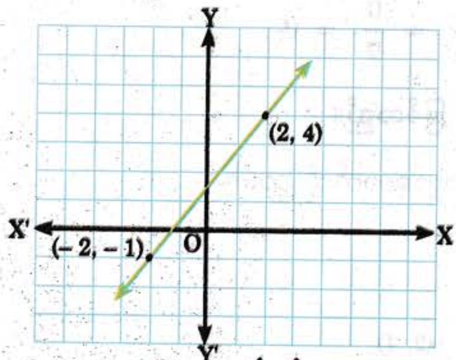
ပုံ ၇.၈

မျဉ်းတစ်လျှောက် ဘယ်မှ ညာသို့ သွားလျှင် x တန်ဖိုးတိုးသွားသည်နှင့်အမျှ y တန်ဖိုး လျော့သွား၍ ယင်းမျဉ်း၏ လျှောစောက်သည် အနုတ်ဖြစ်သည်။ ပုံ ၇. ၉ ကိုကြည့်ပါ။

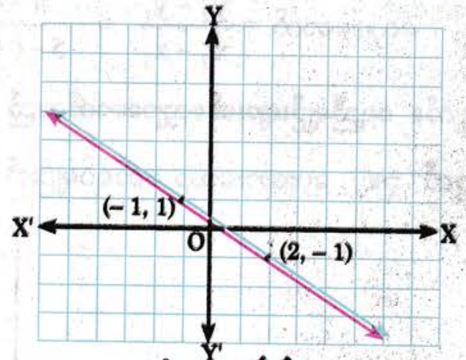


ပုံ ၇.၉

ပုံစံတွက် ၁။ ပေးထားသော ပုံများမှ မျဉ်းများ၏ လျှောစောက်ကို ဖော်ပြပြီး ယင်းတို့တန်ဖိုးကို ရှာပါ။



ပုံ ၇.၁၀(က)



ပုံ ၇.၁၀(ခ)

ပုံ ၇. ၁၀ (က) တွင် မျဉ်းတစ်လျှောက် ဘယ်မှ ညာသို့ သွားလျှင် x နှင့် y တို့၏ တန်ဖိုးနှစ်ခုလုံး တိုးသွားသဖြင့် ယင်းမျဉ်း၏လျှောစောက်သည် အပေါင်းဖြစ်သည်။

$$(x_1, y_1) = (-2, -1), \qquad (x_2, y_2) = (2, 4)$$

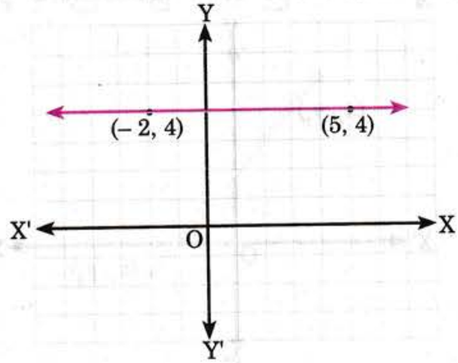
$$\text{လျှောစောက်} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-1)}{2-(-2)} = \frac{5}{4}$$

ပုံ ၇. ၁၀ (ခ) တွင် မျဉ်းတစ်လျှောက် ဘယ်မှ ညာသို့ သွားလျှင် x တန်ဖိုးတိုးသွားပြီး y တန်ဖိုး လျော့သွားသဖြင့် ယင်းမျဉ်း၏ လျှောစောက်သည် အနုတ်ဖြစ်သည်။

$$(x_1, y_1) = (-1, 1), \qquad (x_2, y_2) = (2, -1)$$

$$\text{လျှောစောက်} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-1}{2-(-1)} = -\frac{2}{3}$$

ပုံစံတွက် ၂။ ပေးထားသော ရေညီမျဉ်း၏ လျှောစောက်ကို ရှာပါ။



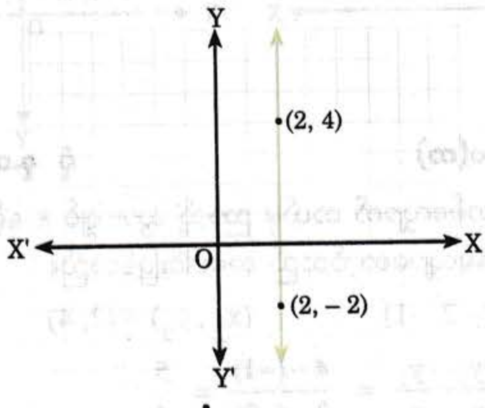
ပုံ ၇.၁၁

$(x_1, y_1) = (-2, 4)$, $(x_2, y_2) = (5, 4)$

$$\text{လျှောစောက်} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-4}{5-(-2)} = \frac{0}{7} = 0$$

မှတ်ချက်။ ရေညီမျဉ်းများ၏ လျှောစောက်သည် 0 ဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ၃။ ပေးထားသော မတ်ရပ်မျဉ်း၏ လျှောစောက်ကို ရှာပါ။



ပုံ ၇.၁၂

$(x_1, y_1) = (2, -2)$, $(x_2, y_2) = (2, 4)$

$$\text{လျှောစောက်} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-(-2)}{2-2} = \frac{6}{0}$$

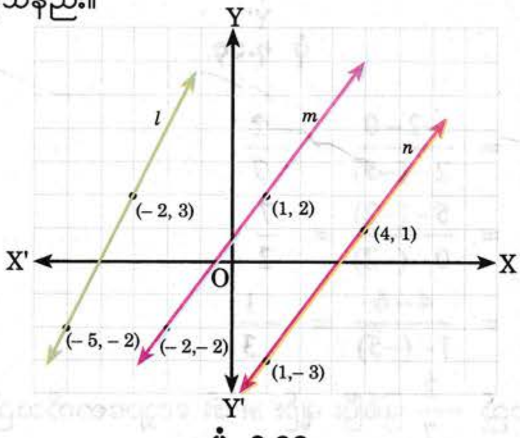
မှတ်ချက်။ မတ်ရပ်မျဉ်းများ၏လျှောစောက်ကို ရှာရာတွင် ပိုင်းခြေသည် 0 ဖြစ်သောကြောင့် အဓိပ္ပာယ် မသတ်မှတ်နိုင်ပါ။

၇.၄ မျဉ်းပြိုင်များနှင့်ထောင့်မတ်မျဉ်းများ၏ လျှောစောက်များ

ပြင်ညီတစ်ခုတည်းပေါ်တွင်ရှိသောမတ်ရပ်မျဉ်းမဟုတ်သည့်မျဉ်းနှစ်ကြောင်း၏လျှောစောက်များတူညီကြလျှင် ထိုမျဉ်းနှစ်ကြောင်း ပြိုင်ကြသည်။ မတ်ရပ်မျဉ်းအားလုံးသည် အချင်းချင်းပြိုင်ကြပြီး Y-ဝင်ရိုးနှင့်လည်း ပြိုင်သည်။ ရေညီမျဉ်းအားလုံးသည် အချင်းချင်းပြိုင်ကြပြီး X-ဝင်ရိုးနှင့်လည်း ပြိုင်သည်။

ပြင်ညီတစ်ခုတည်းပေါ်တွင်ရှိသော မတ်ရပ်မျဉ်းမဟုတ်သည့် မျဉ်းနှစ်ကြောင်း၏ လျှောစောက်များ မြှောက်လဒ်သည် -1 ဖြစ်လျှင် ထိုမျဉ်းနှစ်ကြောင်း ထောင့်မှန်ကျသည်။

ပုံစံတွက် ၁။ ပေးထားသောပုံမှ မျဉ်းများ၏ လျှောစောက်များကို ရှာပါ။ မည်သည့်မျဉ်းများသည် ပြိုင်ကြသနည်း။



ပုံ ၇.၁၃

မျဉ်း l ၏လျှောစောက် $= \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{-2-3}{-5-(-2)} = \dfrac{-5}{-3} = \dfrac{5}{3}$

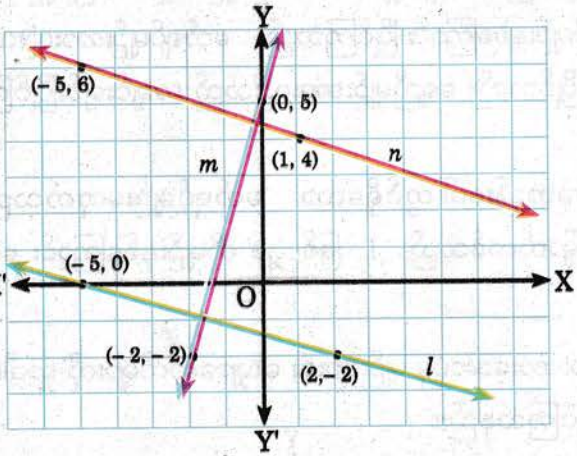
မျဉ်း m ၏လျှောစောက် $= \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{-2-2}{-2-1} = \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$

မျဉ်း n ၏လျှောစောက် $= \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{-3-1}{1-4} = \dfrac{-4}{-3} = \dfrac{4}{3}$

မျဉ်း m ၏ လျှောစောက်နှင့် မျဉ်း n ၏ လျှောစောက်သည် $\dfrac{4}{3}$ ဖြစ်ပြီး မျဉ်း l ၏ လျှောစောက်သည် $\dfrac{5}{3}$ ဖြစ်သည်။

မျဉ်း m ၏လျှောစောက်နှင့် မျဉ်း n ၏လျှောစောက်သည် တူညီသောကြောင့် ထိုမျဉ်းနှစ်ကြောင်း ပြိုင်ကြသည်။

ပုံစံတွက် ၂။ ပေးထားသောပုံမှ မျဉ်းများ၏ လျှောစောက်များကို ရှာပါ။ မည်သည့်မျဉ်းများသည် အချင်းချင်းထောင့်မှန်ကျကြသနည်း။



ပုံ ၇.၁၄

မျဉ်း l ၏လျှောစောက် $= \dfrac{-2-0}{2-(-5)} = -\dfrac{2}{7}$

မျဉ်း m ၏လျှောစောက် $= \dfrac{5-(-2)}{0-(-2)} = \dfrac{7}{2}$

မျဉ်း n ၏လျှောစောက် $= \dfrac{4-6}{1-(-5)} = -\dfrac{1}{3}$

မျဉ်း l ၏လျှောစောက်သည် $-\dfrac{2}{7}$ ဖြစ်ပြီး မျဉ်း m ၏ လျှောစောက်သည် $\dfrac{7}{2}$ ဖြစ်ပြီး မျဉ်း n ၏ လျှောစောက်သည် $-\dfrac{1}{3}$ ဖြစ်သည်။ မျဉ်း l နှင့် မျဉ်း m တို့၏ လျှောစောက်များမြှောက်လဒ်သည် $-\dfrac{2}{7} \times \dfrac{7}{2} = -1$ ဖြစ်သောကြောင့် မျဉ်း l နှင့် မျဉ်း m တို့သည် ထောင့်မှန်ကျကြသည်။

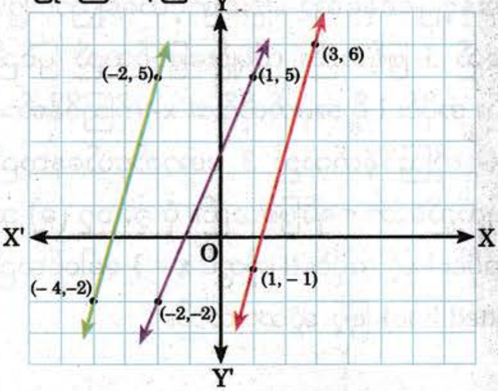
လေ့ကျင့်ခန်း ၇.၂

၁။ ပြင်ညီတစ်ခုတည်းပေါ်တွင် $y = -5$ နှင့် $y = 1$ တို့၏ ဂရပ်များကို ဆွဲပါ။ ထိုမျဉ်းများသည် ပြိုင်ကြပါသလား။

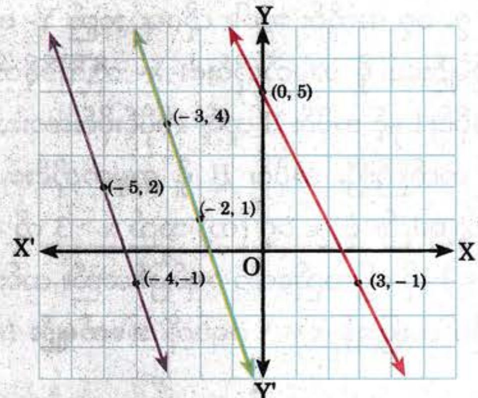
၂။ ပြင်ညီတစ်ခုတည်းပေါ်တွင် $x = -3$ နှင့် $x = 2$ တို့၏ ဂရပ်များကို ဆွဲပါ။ ထိုမျဉ်းများသည် ပြိုင်ကြပါသလား။

၃။ ပြင်ညီတစ်ခုတည်းပေါ်တွင် $x = -2$ နှင့် $y = 8$ တို့၏ ဂရပ်များကို ဆွဲပါ။ ထိုမျဉ်းများသည် အချင်းချင်း ထောင့်မှန်ကျကြပါသလား။

၄။ ပေးထားသောပုံများမှ မျဉ်းများ၏ လျှောစောက်များကို ရှာပါ။ မည်သည့်မျဉ်းများသည် ပြိုင်ကြသနည်း။

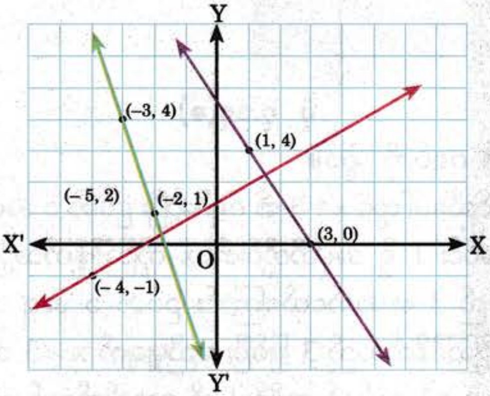


ပုံ ၇.၁၅(က)

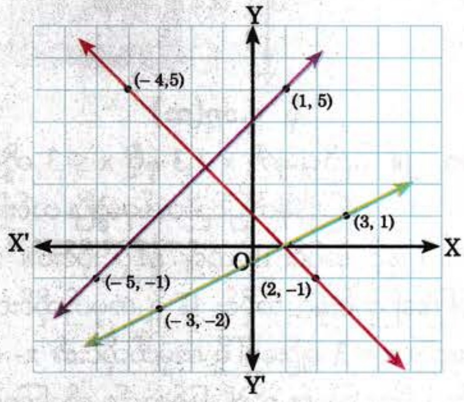


ပုံ ၇.၁၅(ခ)

၅။ ပေးထားသောပုံများမှ မျဉ်းများ၏လျှောစောက်များကို ရှာပါ။ မည်သည့်မျဉ်းများသည် အချင်းချင်း ထောင့်မှန်ကျကြသနည်း။



ပုံ ၇.၁၆(က)



ပုံ ၇.၁၆(ခ)

၆။ အောက်ပါ ပေးထားသောအမှတ်နှစ်မှတ်ကိုဖြတ်သွားသည့် မျဉ်းများ၏ လျှောစောက်များကို ရှာပါ။

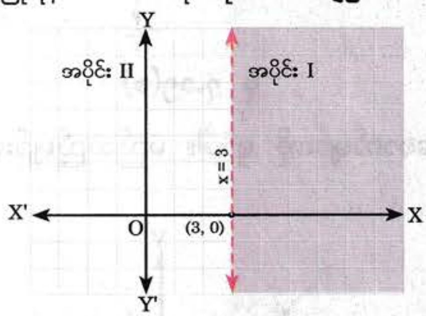
(က) $(4, -1), (-2, -1)$ (ခ) $(10, 4), (4, 15)$

(ဂ) $(-3, 1), (-1, 5)$ (ဃ) $(-1, 3), (2, -3)$

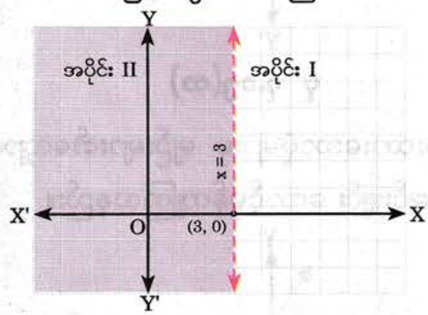
၇.၅ ကိန်းရှင်တစ်ခုပါမညီမျှချက်များ၏ ဂရပ်

ဥပမာ ၁။ မညီမျှချက် $x > 3$ နှင့် $x < 3$ တို့၏ ဂရပ်တို့ကို ဆွဲပါ။

ကိုဩဒိနိတ်ပြင်ညီတစ်ခုကိုဆွဲပြီး ယင်းပြင်ညီပေါ်တွင် ညီမျှခြင်း $x = 3$ ၏ ဂရပ်ပုံကို ပုံ ၇. ၁၇ အတိုင်း ဆွဲပါ။ ထိုဂရပ်သည် Y- ဝင်ရိုးနှင့်ပြိုင်နေသော မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်းဖြစ်ပြီး ထိုမျဉ်းပေါ်ရှိ အမှတ်တိုင်း၏ x- ကိုဩဒိနိတ်သည် 3 ဖြစ်သည်။ ထိုမျဉ်းဖြောင့်သည် ပြင်ညီကို အပိုင်း I နှင့် အပိုင်း II ဟူ၍ နှစ်ပိုင်းပိုင်းထားသည်။ အပိုင်း I ရှိ အမှတ်တိုင်း၏ x- ကိုဩဒိနိတ်သည် 3 ထက်ကြီးပြီး အပိုင်း II ရှိ အမှတ်တိုင်း၏ x- ကိုဩဒိနိတ်သည် 3 အောက်ငယ်နေသည်ကို တွေ့ရမည်။ ပုံ ၇. ၁၇ (က) သည် $x > 3$ ကို ပြေလည်သော ဂရပ်ဖြစ်သည်။ ပုံ ၇. ၁၇ (ခ) သည် $x < 3$ ကို ပြေလည်သော ဂရပ်ဖြစ်သည်။ ယင်း အပိုင်း I နှင့် အပိုင်း II တို့တွင် $x = 3$ မပါဝင်သည်ကို ကိုယ်စားပြုရန် $x = 3$ ဂရပ်ကို **အစက်မျဉ်း** (dotted line) ဖြင့် ဆွဲထားသည်။



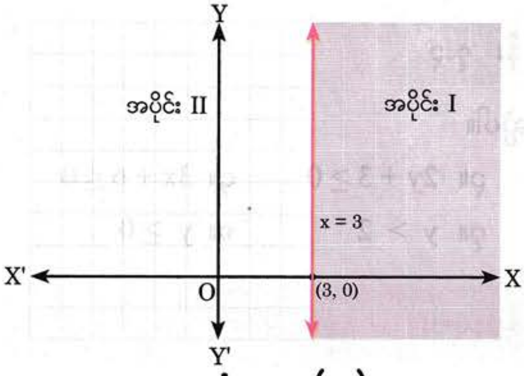
ပုံ ၇.၁၇(က)



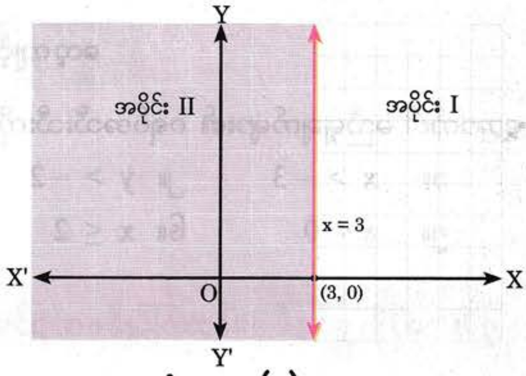
ပုံ ၇.၁၇(ခ)

ဥပမာ ၂။ မညီမျှချက် $x \geq 3$ နှင့် $x \leq 3$ တို့၏ ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။

ကိုဩဒိနိတ်ပြင်ညီတစ်ခုဆွဲပြီး ယင်းပြင်ညီပေါ်တွင် $x = 3$ ၏ ဂရပ်ဆွဲပြီး ဥပမာ ၁ အတိုင်း အပိုင်း I နှင့် အပိုင်း II ဟူ၍ နှစ်ပိုင်းပိုင်းပါ။ အပိုင်း I ရှိ အမှတ်တိုင်း၏ x- ကိုဩဒိနိတ်သည် 3 ထက်ကြီးကြောင်းနှင့် အပိုင်း II ရှိ အမှတ်တိုင်းသည် 3 အောက်ငယ်ကြောင်း ဥပမာ ၁ အရ သိပြီး ဖြစ်သည်။ $x = 3$ မျဉ်းပေါ်ရှိ အမှတ်တိုင်း၏ x- ကိုဩဒိနိတ်သည် 3 ဖြစ်ပြီး မညီမျှချက် $x > 3$ သည် အပိုင်း I ဖြစ်ကြောင်း သိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ထို့ကြောင့် $x = 3$ ဂရပ်နှင့် အပိုင်း I တို့ နှောလိုက်လျှင် $x \geq 3$ ကို ရေးဆွဲနိုင်မည်။ ယင်းဂရပ်သည် $x = 3$ ဂရပ်ပါဝင်နေသည့် အပိုင်း I ဖြစ်သည်။ ပုံ ၇. ၁၈ (က) သည် $x \geq 3$ ကို ပြေလည်သော ဂရပ်ဖြစ်သည်။ ထို့အတူ $x = 3$ ဂရပ်နှင့် အပိုင်း II တို့ နှောလိုက်လျှင် မညီမျှချက် $x \leq 3$ ကို ပြေလည်သော ဂရပ်ကို ရေးဆွဲနိုင်သည်။ ယင်းဂရပ်သည် $x = 3$ ပါဝင်နေသည့် အပိုင်း II ဖြစ်သည်။ ပုံ ၇. ၁၈ (ခ) သည် $x \leq 3$ ကို ပြေလည်သော ဂရပ်ဖြစ်သည်။ ယင်း အပိုင်း I နှင့် အပိုင်း II တို့တွင် $x = 3$ ပါဝင်နေသည်ကို ကိုယ်စားပြုရန် $x = 3$ ဂရပ်ကို တစ်ဆက်တည်းမျဉ်း ဖြင့် ဆွဲထားသည်။



ပုံ ၇.၁၈(က)

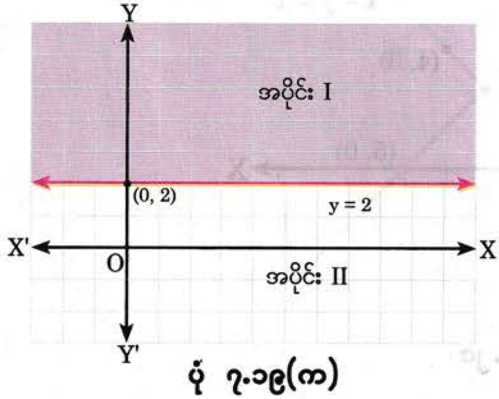


ပုံ ၇.၁၈(ခ)

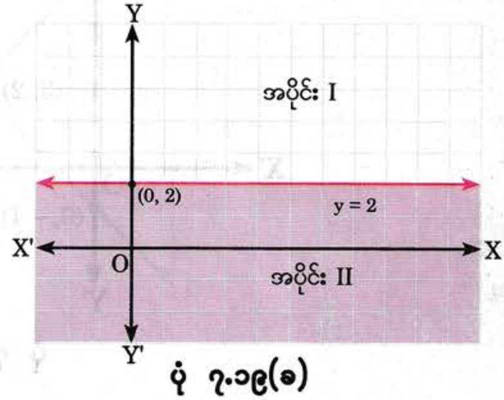
မှတ်ချက်။ အစက်ပြသောမျဉ်းသည် ၄င်းဂရပ်တွင် မပါဝင်ချေ။ တစ်ဆက်တည်းဖြစ်သော မျဉ်းသည် သက်ဆိုင်ရာဂရပ်တွင် ပါဝင်သည်။

ဥပမာ ၃။ မညီမျှချက် $y \geq 2$ နှင့် $y \leq 2$ တို့၏ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။

ကိုသြဒိနိတ်ပြင်ညီတစ်ခုဆွဲပြီး ယင်းပြင်ညီပေါ်တွင် ညီမျှခြင်း $y = 2$ ၏ ဂရပ်ကိုဆွဲပါ။ ယင်းမျဉ်းဖြောင့်သည် X- ဝင်ရိုးနှင့် ပြိုင်နေသည်။ ထိုမျဉ်းဖြောင့်သည် ပြင်ညီကို အပိုင်း I နှင့် အပိုင်း II တို့ဟူ၍ နှစ်ပိုင်း ပိုင်းထား၏။ ယင်းမျဉ်းဖြောင့်ပေါ်ရှိ အမှတ်တိုင်း၏ y- ကိုသြဒိနိတ်သည် 2 ဖြစ်ပြီး အပိုင်း I သည် မညီမျှချက် $y > 2$ ကို ပြေလည်သည်။ ထို့ကြောင့် $y = 2$ ဂရပ်နှင့် အပိုင်း I တို့ နှောလိုက်လျှင် မညီမျှချက် $y \geq 2$ ၏ ဂရပ်ကို ရေးဆွဲနိုင်သည်။ ယင်းဂရပ်သည် $y = 2$ ဂရပ် ပါဝင်နေသည့် အပိုင်း I ဖြစ်သည်။ ပုံ ၇. ၁၉ (က) သည် မညီမျှချက် $y \geq 2$ ကို ပြေလည်သော ဂရပ် ဖြစ်သည်။ ထို့အတူ $y = 2$ ဂရပ်နှင့် အပိုင်း II တို့ နှောလိုက်လျှင် မညီမျှချက် $y \leq 2$ ဂရပ်ကို ရေးဆွဲနိုင်သည်။ ယင်းဂရပ်သည် $y = 2$ ပါဝင်နေသည့် အပိုင်း II ဖြစ်သည်။ ပုံ ၇. ၁၉ (ခ) သည် မညီမျှချက် $y \leq 2$ ကို ပြေလည်သော ဂရပ်ဖြစ်သည်။ ယင်းအပိုင်း I နှင့် II တို့တွင် $y = 2$ ဂရပ် ပါဝင်နေသည်ကို ကိုယ်စားပြုရန် $y = 2$ ဂရပ်ကို တစ်ဆက်တည်းမျဉ်းဖြင့် ဆွဲထားသည်။



ပုံ ၇.၁၉(က)



ပုံ ၇.၁၉(ခ)

လေ့ကျင့်ခန်း ၇.၃

အောက်ပါ မညီမျှချက်များ၏ ဂရပ်အသီးသီးကို ဆွဲပါ။

၁။ $x > -3$ ၂။ $y > -2$ ၃။ $2y + 3 \geq 0$ ၄။ $3x + 6 \leq 0$

၅။ $x < 0$ ၆။ $x \leq 2$ ၇။ $y > 2$ ၈။ $y \geq 0$

၇.၆ ကိန်းရှင်နှစ်ခုပါတစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းများ

ကိန်းရှင်နှစ်ခုပါ တစ်ထပ်ညီမျှခြင်းတစ်ခု၏ဂရပ်သည် မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်းဖြစ်ကြောင်း လေ့လာတွေ့ရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ယခုကိန်းရှင်နှစ်ခုပါတစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းများကို ဂရပ်သုံး၍ ဖြေရှင်းမည်။

ပုံစံတွက် ၁။ တစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်း $\left.\begin{aligned} x + y &= 5 \\ x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$ ကို ဂရပ်ဆွဲ၍ ဖြေရှင်းပါ။

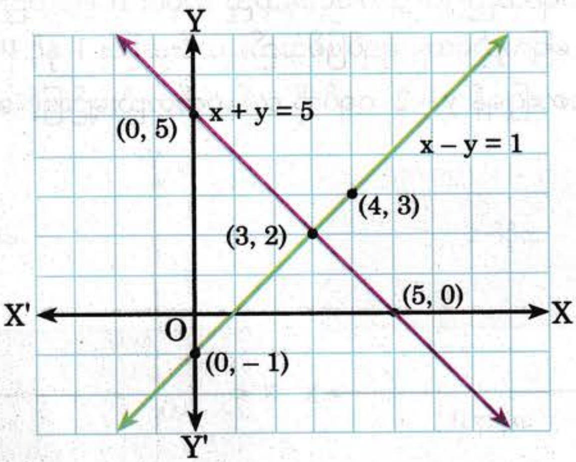
$x + y = 5$

x	0	5
y	5	0

$x - y = 1$

x	0	4
y	–1	3

(0, 5) နှင့် (5, 0) ကို ဆက်သောမျဉ်းဖြောင့်သည် $x + y = 5$ ၏ဂရပ်ဖြစ်ပြီး (0, –1) နှင့် (4, 3) ကို ဆက်သောမျဉ်းဖြောင့်သည် $x - y = 1$ ၏ဂရပ်ဖြစ်သည်။

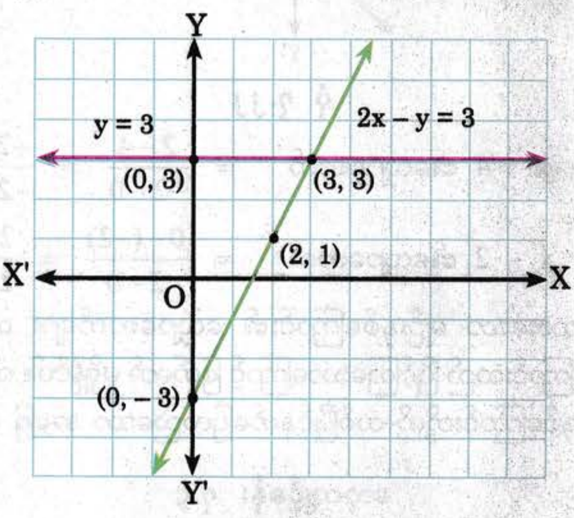


ပုံ ၇.၂၀

ထိုမျဉ်းနှစ်ကြောင်းတို့သည် (3, 2) အမှတ်၌ ဖြတ်ကြသည်။
ထို့ကြောင့် ပေးထားသော တစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းများ၏ အဖြေသည် $x = 3, y = 2$ ဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ၂။ တစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်း $\left.\begin{aligned} y &= 3 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}\right\}$ ကို ဂရပ်ဆွဲ၍ ဖြေရှင်းပါ။

$y = 3$ ၏ဂရပ်သည် (0, 3) ကို ဖြတ်သွားသော ရေညီမျဉ်းဖြစ်သည်။
$2x - y = 3$ ၏ဂရပ်သည် (0, – 3) နှင့် (2, 1) တို့ကို ဆက်ဆွဲသောမျဉ်းဖြောင့်ဖြစ်သည်။



ပုံ ၇.၂၁

ထိုမျဉ်းနှစ်ကြောင်းတို့သည် (3, 3) အမှတ်၌ ဖြတ်ကြသည်။
ထို့ကြောင့် ပေးထားသော တစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းများ၏ အဖြေသည် $x = 3, y = 3$ ဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ၃။ ဂရပ်ဆွဲခြင်းဖြင့် ညီမျှခြင်း $y = x + 4$ နှင့် $y = x - 2$ တို့ကို တစ်ပြိုင်နက်ပြေလည်သော အဖြေ မရှိကြောင်းပြပါ။

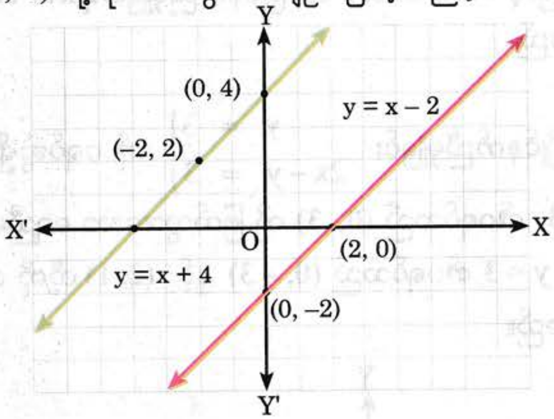
$y = x + 4$

x	0	–2
y	4	2

$y = x - 2$

x	0	2
y	–2	0

(0, 4) နှင့် (–2, 2) တို့ကို ဆက်ဆွဲသောမျဉ်းဖြောင့်သည် $y = x + 4$ ၏ဂရပ်ဖြစ်ပြီး (0,–2) နှင့် (2, 0) တို့ကို ဆက်ဆွဲသောမျဉ်းဖြောင့်သည် $y = x - 2$ ၏ဂရပ် ဖြစ်သည်။



ပုံ ၇.၂၂

$$y = x + 4 \text{ ၏လျှောစောက်} = \frac{2-4}{-2-0} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$y = x - 2 \text{ ၏လျှောစောက်} = \frac{0-(-2)}{2-0} = \frac{2}{2} = 1$$

ပေးထားသော မျဉ်းနှစ်ကြောင်း၏ လျှောစောက်များ တူညီနေသဖြင့် ထိုမျဉ်းနှစ်ကြောင်းသည် ပြိုင်ကြသောကြောင့် ဖြတ်မှတ် မရှိနိုင်ပါ။ ထို့ကြောင့် ပေးထားသော မျဉ်းနှစ်ကြောင်းတို့ကို တစ်ပြိုင်နက်ပြေလည်သော အဖြေ မရှိပါ။

လေ့ကျင့်ခန်း ၇.၄

၁။ အောက်ပါတစ်ပြိုင်နက်ညီမျှခြင်းများ၏ အဖြေကို ဂရပ်ဆွဲခြင်းဖြင့် ဖြေရှင်းပါ။

က။ $\left.\begin{aligned} 5x + y &= 4 \\ x - 2y &= 3 \end{aligned}\right\}$

ခ။ $\left.\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 4 \end{aligned}\right\}$

ဂ။ $\left.\begin{aligned} x + 3y &= 12 \\ 3x + y &= 12 \end{aligned}\right\}$

ဃ။ $\left.\begin{aligned} x + y &= 8 \\ y &= x \end{aligned}\right\}$

င။ $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 12 \\ 5x - 4y &= 16 \end{aligned}\right\}$

စ။ $\left.\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$

ဆ။ $\left.\begin{aligned} x - 4y &= 12 \\ 5x + 7y &= 0 \end{aligned}\right\}$

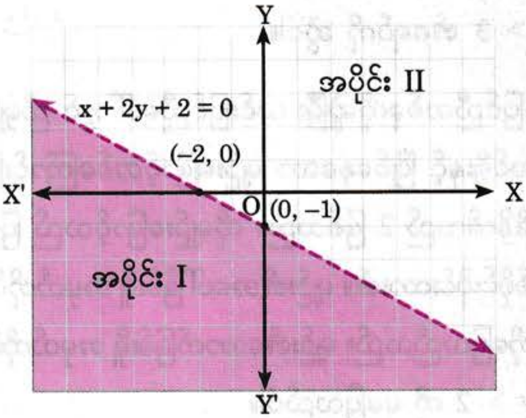
ဇ။ $\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 2 \\ x &= 4 \end{aligned}\right\}$

၂။ ဂရပ်ဆွဲခြင်းဖြင့် ညီမျှခြင်း $3x - 2y + 6 = 0$ နှင့် $3x - 2y = 0$ တို့ကို တစ်ပြိုင်နက်ပြေလည်သောအဖြေ မရှိကြောင်းပြပါ။

၇.၇ ကိန်းရှင်နှစ်ခုပါမညီမျှချက်များ၏ဂရပ်

ဥပမာ ၁။ မညီမျှချက် $x + 2y + 2 < 0$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။

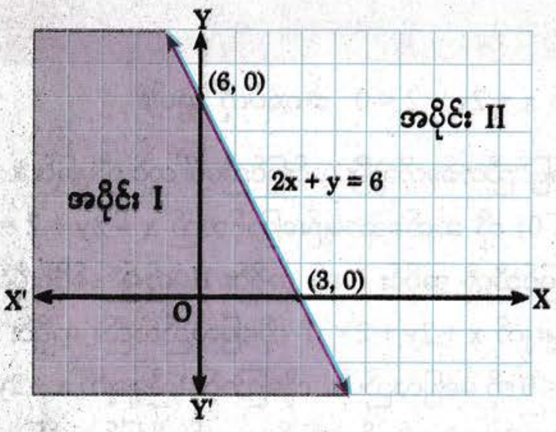
ကိုသြဒိနိတ်ပြင်ညီတစ်ခုကိုဆွဲပြီး ယင်းပြင်ညီပေါ်တွင် ညီမျှခြင်း $x+2y+2=0$ ၏ ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။ $(0, -1)$ နှင့် $(-2, 0)$ ကို ဆက်သောမျဉ်းဖြောင့်သည် $x + 2y + 2 = 0$ ၏ဂရပ် ဖြစ်သည်။ ယင်းမျဉ်းဖြောင့်သည် ပြင်ညီကို အပိုင်း I နှင့် အပိုင်း II ဟူ၍ နှစ်ပိုင်းပိုင်းထား၏။ အပိုင်း I ရှိ အမှတ်တိုင်းသည် မညီမျှချက် $x + 2y + 2 < 0$ ကိုပြေလည်သည်။ အပိုင်း II ရှိ အမှတ်တိုင်းသည် မညီမျှချက် $x + 2y + 2 < 0$ ကို မပြေလည်ပါ။ ထို့ကြောင့် မညီမျှချက် $x + 2y + 2 < 0$ ၏ဂရပ်သည် အပိုင်း I ဖြစ်သည်။ $x + 2y + 2 = 0$ ၏ဂရပ်ကို အစက်မျဉ်းဖြင့် ဖော်ပြထားသည်။



ပုံ ၇.၂၃

ဥပမာ ၂။ မညီမျှချက် $2x + y \leq 6$ ၏ဂရပ်ကိုဆွဲပါ။

ကိုသြဒိနိတ်ပြင်ညီတစ်ခုကိုဆွဲပြီး ယင်းပြင်ညီပေါ်တွင် ညီမျှခြင်း $2x + y = 6$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။ $(0, 6)$ နှင့် $(3, 0)$ တို့ကို ဆက်သောမျဉ်းဖြောင့်သည် $2x + y = 6$ ၏ဂရပ်ဖြစ်သည်။ ယင်းမျဉ်းဖြောင့်သည် ပြင်ညီကို အပိုင်း I နှင့် အပိုင်း II ဟူ၍ နှစ်ပိုင်းပိုင်းထား၏။ အပိုင်း I ရှိ အမှတ်တိုင်းသည် မညီမျှချက် $2x + y \leq 6$ ကို ပြေလည်သည်။ အပိုင်း II ရှိ အမှတ်တိုင်းသည် မညီမျှချက် $2x + y \leq 6$ ကို မပြေလည်ပါ။ ထို့ကြောင့် မညီမျှချက် $2x + y \leq 6$ ၏ဂရပ်သည် မျဉ်းဖြောင့် $2x + y = 6$ နှင့် အပိုင်း I တို့ ပါဝင်သည်။

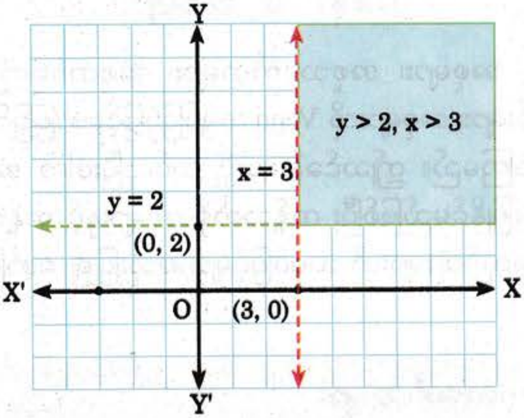


ပုံ ၇.၂၄

ဥပမာ ၃။ $y > 2$, $x > 3$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။

ကိုဩဒိနိတ်ပြင်ညီတစ်ခုကိုဆွဲပြီး ယင်းပြင်ညီပေါ်တွင် ညီမျှခြင်း $y = 2$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။ ထိုဂရပ်သည် X-ဝင်ရိုးနှင့် ပြိုင်နေသော မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်းဖြစ်ပြီး မျဉ်းဖြောင့်ပေါ်ရှိ အမှတ်တိုင်း၏ y-ကိုဩဒိနိတ်သည် 2 ဖြစ်သည်။ ထိုမျဉ်းဖြောင့်သည် ပြင်ညီကို မျဉ်းအပေါ်ခြမ်း နှင့် အောက်ခြမ်း ဟူ၍ နှစ်ပိုင်းပိုင်းထား၏။ မျဉ်း၏အပေါ်ခြမ်းရှိ အမှတ်တိုင်း၏ y-ကိုဩဒိနိတ်သည် 2 ထက်ကြီးသဖြင့် $y > 2$ ကိုပြေလည်သည်။ မျဉ်း၏အောက်ခြမ်းရှိ အမှတ်တိုင်း၏ y-ကိုဩဒိနိတ်သည် 2 အောက် ငယ်သဖြင့် $y > 2$ ကို မပြေလည်ပါ။

တစ်ဖန် ပြင်ညီပေါ်တွင် ညီမျှခြင်း $x = 3$ ၏ဂရပ်ကို ဆွဲပါ။ ထိုဂရပ်သည် Y-ဝင်ရိုးနှင့်ပြိုင်နေသော မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်းဖြစ်ပြီး မျဉ်းဖြောင့်ပေါ်ရှိ အမှတ်တိုင်း၏ x-ကိုဩဒိနိတ်သည် 3 ဖြစ်သည်။ ထိုမျဉ်းဖြောင့်သည် ပြင်ညီကို မျဉ်း၏ ဝဲခြမ်းနှင့် ယာခြမ်း ဟူ၍ နှစ်ပိုင်း ပိုင်းထား၏။ မျဉ်း၏ယာခြမ်းရှိ အမှတ်တိုင်း၏ x-ကိုဩဒိနိတ်သည် 3 ထက်ကြီးသဖြင့် $x > 3$ ကို ပြေလည်သည်။ မျဉ်း၏ဝဲခြမ်းရှိ အမှတ်တိုင်း၏ x-ကိုဩဒိနိတ်သည် 3 အောက်ငယ်သဖြင့် $x > 3$ ကို မပြေလည်ပါ။



ပုံ ၇.၂၅

ထို့ကြောင့် $y > 2$ နှင့် $x > 3$ တို့ကို တစ်ပြိုင်နက်ပြေလည်သော အပိုင်းသည် ပုံ ၇. ၂၅ တွင် အရောင်ခြယ်ထားသော အပိုင်းဖြစ်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၇.၅

အောက်ပါ မညီမျှချက်များ၏ ဂရပ်အသီးသီးကို ဆွဲပါ။

၁။ $x + 2y \geq 4$	၂။ $y > x$	၃။ $y < -x$	၄။ $y \leq x + 2$
၅။ $x \leq 0,\ y \geq 0$	၆။ $y < 3, x > -2$	၇။ $y \leq 4, x \geq 2$	၈။ $y < 1, x \geq 3$

အခန်း ၈ အစုများ

ဤအခန်းတွင် အစုများ၊ အစုသင်္ကေတများ၊ အစုတစ်ခုကို ဖော်ပြသည့်နည်းများ၊ အစုလုပ်ထုံးများ၊ ကြားပိုင်းများ၊ အစုများကို Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့်ဖော်ပြခြင်းနှင့် အစုလုပ်ထုံးဆိုင်ရာ ဥပဒေသများကို လေ့လာကြမည်။ ဤသင်ခန်းစာကို သင်ယူပြီးပါက အစုတစ်ခုကို ဖော်ပြသည့် နည်းများကိုသိရှိ၍ အသုံးပြုနိုင်မည်ဖြစ်ပြီး ကန့်သတ်ရှိအစုများနှင့် ကန့်သတ်မဲ့အစုများကို ခွဲခြား သိရှိနိုင်မည်။ ထို့ပြင် အစုလုပ်ထုံးများကို သရုပ်ပြပုံများအသုံးပြု၍ ဖော်ပြနိုင်မည် ဖြစ်သည်။

၈.၁ အစုများနှင့်အစုသင်္ကေတများ

အစုကိုအခြေခံသော အသုံးအနှုန်းအရေးအသားများနှင့်အစုများသည် သင်္ချာဘာသာကို လေ့လာရာတွင် အရေးပါသည်။ ၎င်းတို့ကိုအသုံးပြု၍ သင်္ချာဆိုင်ရာအယူအဆများကို တိုတိုနှင့် လိုရင်းရောက်အောင် စုစည်းဖော်ပြနိုင်သည်။ ဦးစွာ အစုနှင့်အစုဝင်တို့ကို အဓိပ္ပာယ် သတ်မှတ်မည်။

အစုဆိုသည်မှာ သေချာတိကျစွာသတ်မှတ်ထားသော အစုအဝေးကို ဆိုလိုသည်။

အစုဝင် ဆိုသည်မှာ အစုတစ်ခုတွင်ပါဝင်သောအရာများဖြစ်သည်။

အကယ်၍ အစုတစ်ခုတွင် အစုဝင်တစ်ခုသည် တစ်ကြိမ်ထက်ပိုပါဝင်နေလျှင် ၎င်းကို တစ်ကြိမ်သာ ဖော်ပြမည်။ အောက်တွင်အစုအချို့ကို ဥပမာများအဖြစ်ဖော်ပြထားသည်။

ဥပမာ ၁။ မြန်မာနိုင်ငံသားများ အစု။
ဥပမာ ၂။ ပေးရင်းမျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်းပေါ်တွင်ရှိသည့် အမှတ်များ အစု။
ဥပမာ ၃။ ရွာတစ်ရွာတွင်ရှိသည့် ကျောင်းနေအရွယ်ကလေးများ အစု။
ဥပမာ ၄။ ကိန်းပြည့်များ အစု။
ဥပမာ ၅။ 1 နှင့် 10 ကြားရှိသဘာဝကိန်းများ အစု။
ဥပမာ ၆။ အင်္ဂလိပ်စာလုံး committee တွင်ပါဝင်သည့် အင်္ဂလိပ်အက္ခရာများ အစု။

အစုများကို အင်္ဂလိပ်စာလုံးအကြီး A, B, C, X, Y, . . . တို့ဖြင့် အမည်ပေးဖော်ပြသည်။ အစုဝင်များကို အင်္ဂလိပ်စာလုံးအသေး a, b, c, . . . တို့ဖြင့် အမည်ပေးဖော်ပြသည်။

a သည် အစု A ထဲတွင်ပါဝင်ခဲ့လျှင် သင်္ကေတဖြင့် $\mathbf{a \in A}$ ဟုရေးပြီး a သည် A ၏ အစုဝင် (a belongs to A / a is in A) ဟုဖတ်သည်။

a သည် အစု A ထဲတွင်မပါဝင်ခဲ့လျှင် သင်္ကေတဖြင့် $\mathbf{a \notin A}$ ဟုရေးပြီး a သည် A ၏ အစုဝင်မဟုတ် (a does not belong to A / a is not in A) ဟုဖတ်သည်။

ဥပမာ ၇။ 4 သည် အစု A ထဲရှိ အစုဝင်တစ်ခုဖြစ်လျှင် $4 \in A$ ဟုရေးသည်။
10 သည် အစု A ၏အစုဝင်တစ်ခုမဟုတ်လျှင် $10 \notin A$ ဟုရေးသည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၈.၁

၁။ အောက်ပါ ဖော်ပြချက်တို့ကို သင်္ကေတဖြင့် ရေးပါ။

(က) 2 သည် အစု A တွင်ပါဝင်သည်။

(ခ) 13 သည် အစု B တွင်မပါဝင်ပါ။

(ဂ) a သည် အစု C တွင်ပါဝင်သည်။

(ဃ) 0 သည် အစု D တွင်ပါဝင်သည်။

(င) 23 သည် အစု B တွင်မပါဝင်ပါ။

(စ) 2 သည် အစု F တွင်ပါဝင်သည်။

၂။ အောက်ပါဖော်ပြချက်များအတွက် အဖြေသည် မှားသည် သို့မဟုတ် မှန်သည်ကို ဖော်ပြပါ။

(က) A သည် 0 နှင့် 10 ကြားရှိသော သဘာဝကိန်းများအစု ဖြစ်လျှင် $3 \in A$ ဟု ဖော်ပြနိုင်သည်။

(ခ) B သည် 10 အောက်ငယ်သောသုဒ္ဓကိန်းများအစု ဖြစ်လျှင် $3 \notin B$ ဟု ဖော်ပြနိုင်သည်။

(ဂ) C သည် 100 အောက်ငယ်သောနှစ်ထပ်ကိန်းများအစု ဖြစ်လျှင် $64 \in C$ ဟု ဖော်ပြနိုင်သည်။

(ဃ) D သည် 36 ၏ဆခွဲကိန်းများအစု ဖြစ်လျှင် $72 \in D$ ဟု ဖော်ပြနိုင်သည်။

၈.၂ အစုတစ်ခုကိုဖော်ပြနည်းများ

၈.၂.၁ စာသားဖြင့်ဖော်ပြခြင်း (In Words)

အစုတစ်စုတွင် မည်သည့်အစုဝင်တို့ပါရှိသည်ကို ဖော်ပြရန်နည်းတစ်နည်းမှာ စာသားဖြင့် ဖော်ပြခြင်းဖြစ်သည်။

ဥပမာ။

R = ကိန်းစစ်များအစု၊	W = အပြည့်ကိန်းများအစု၊
N = သဘာဝကိန်းများအစု၊	J = ကိန်းပြည့်များအစု၊
J^+ = အပေါင်းကိန်းပြည့်များအစု၊	Q = ရာရှင်နယ်ကိန်းများအစု၊
E = အပြည့် စုံကိန်းများအစု၊	O = အပေါင်း မကိန်းများအစု။

၈.၂.၂ စာရင်းပြုစုနည်းဖြင့်ဖော်ပြခြင်း (By Listing its Elements)

အစုတစ်စုတွင် မည်သည့်အစုဝင်တို့ ပါရှိသည်ကို ဖော်ပြရန် နည်းတစ်နည်းမှာ အစုဝင်များ အားလုံးကို တွန့်ကွင်းအတွင်းသို့သွင်း၍ ရေးနည်းဖြစ်သည်။ အစုဝင်တစ်ခုနှင့်တစ်ခုကြားတွင် " , " သင်္ကေတဖြင့် ခြားထားရမည်။

ဥပမာ။ $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ $\quad N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$J = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ $\quad J^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

$E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ $\quad O = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

A = 10 အောက်ငယ်သော အပေါင်း မကိန်းများအစု

$= \{1, 3, 5, 7, 9\}$

အစုတစ်ခု၏ အစုဝင်များကို ရေးရာတွင် မည်သည့်အစီအစဉ်တိုင်းမဆို ရေးနိုင်သည်။ ထို့ကြောင့်အောက်ပါအစုများသည် အတူတူပင်ဖြစ်သည်။

$\{a, b, c\}, \{b, a, c\}, \{c, b, a\}$.

၈.၂.၃ အစုတည်ဆောက်သည့်နည်းဖြင့်ဖော်ပြခြင်း (In Set Builder Form)

အစုတည်ဆောက်သည့်ပုံစံဖြင့်ဖော်ပြနည်းသည် အစုတစ်ခုထဲတွင်ပါဝင်သော အစုဝင်များ ရှိရမည့် ဂုဏ်သတ္တိကိုဖော်ပြခြင်းဖြစ်သည်။

ဤနည်းကိုအသုံးပြု၍ ကိန်းစစ်များ၊ သဘာဝကိန်းများ၊ ကိန်းပြည့်များစသည့် အစုများကို လွယ်ကူစွာဖော်ပြနိုင်သည်။

R = { x | x သည် ကိန်းစစ်တစ်ခု}

ဥပမာ။ G သည် 8 အောက်ငယ်သော သဘာဝကိန်းများအစုဖြစ်လျှင် G ကို အစုတည်ဆောက်သည့်ပုံစံဖြင့် ဖော်ပြပါ။

G = { x | x သည် သဘာဝကိန်း , $x < 8$}

လေ့ကျင့်ခန်း ၈.၂

၁။ အောက်ပါအစုတို့ကို စာရင်းပြုစုနည်းနှင့် အစုတည်ဆောက်နည်းတို့ကိုသုံး၍ ဖော်ပြပါ။

(က) သဘာဝကိန်းများ အစု N

(ခ) ကိန်းပြည့်များ အစု J

(ဂ) သုဒ္ဓကိန်းများ အစု P

(ဃ) 0 နှင့် 10 ကြားရှိသော စုံကိန်းများ အစု A

(င) 1 နှင့် 30 ကြားရှိ 5 ဖြင့်စား၍ပြတ်သော ကိန်းများ အစု B

(စ) 0 ထက်ကြီးပြီး 7 အောက်ငယ်သော ကိန်းပြည့်များ အစု C

(ဆ) ဆယ်ကိန်းတွင်ပါသော ဂဏန်းနှစ်လုံး၏ပေါင်းလဒ်သည် 7 ဖြစ်စေမည့် ဆယ်ကိန်းများ အစု D

(ဇ) ညီမျှခြင်း $x^2 = 3$ ကိုပြေလည်သည့် ကိန်းစစ်များ အစု E

(ဈ) 20 အောက်ငယ်သော သုဒ္ဓကိန်းများ အစု F

(ည) ညီမျှခြင်း $3x^2 + 5x - 2 = 0$ ကိုပြေလည်သည့် ကိန်းစစ်များ အစု G

၂။ J^+ = အပေါင်းကိန်းပြည့်များအစုနှင့် $E = \{2, 4, 6, 8\}$ ဖြစ်လျှင်အောက်ပါအစုတစ်ခုစီအတွက် သင့်လျော်သောဖော်ပြချက်ကိုရွေးချယ်ပါ။

(က) E = { x | x သည် 10 အောက်ငယ်သော စုံကိန်း}

(ခ) E = { x | x သည် 10 အောက်ငယ်သော အပေါင်းစုံကိန်း}

(ဂ) E = { x | $x \in J^+$ နှင့် x သည် 10 အောက်ငယ်သော 2 ၏ဆတိုးကိန်း}

၃။ J^+ = အပေါင်းကိန်းပြည့်များအစုနှင့် $F = \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$ ဖြစ်လျှင် အောက်ပါ အစုတစ်ခုစီအတွက် သင့်လျော်သော ဖော်ပြချက်ကို ရွေးချယ်ပါ။

(က) F = { x | x သည် 3 ဖြင့် စား၍ပြတ်သောအပေါင်းကိန်းပြည့်}

(ခ) F = { x | x သည် 3 ၏ဆတိုးကိန်း}

(ဂ) $F = \{ x \mid x = 3k, k \in J^+\}$

၈.၃ ကန့်သတ်ရှိအစုများ၊ကန့်သတ်မဲ့အစုများ၊ဗလာအစု၊စကြဝဠာအစု

၈.၃.၁ ကန့်သတ်ရှိအစုများ

အစုဝင်အရေအတွက်ကို အပြည့်ကိန်းတစ်ခုဖြင့်ဖော်ပြနိုင်လျှင် ထိုအစုကို **ကန့်သတ်ရှိအစု** (finite set) ဟုခေါ်သည်။

ဥပမာ ၁။ $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

ဥပမာ ၂။ 50 အောက်ငယ်သော 4 ၏ဆတိုးကိန်းများအစု

၈.၃.၂ ကန့်သတ်မဲ့အစုများ

အစုတစ်ခုတွင် ၎င်း၏အစုဝင်အရေအတွက် အကန့်အသတ်မရှိများနေလျှင် ထိုအစုကို **ကန့်သတ်မဲ့အစု** (infinite set) ဟုခေါ်သည်။

ဥပမာ ၁။ $\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ ဤတွင် အစက်များသည် ဆက်လက်ဖော်ပြရမည့် စုံကိန်းများကို ကိုယ်စားပြုသည်။

ဥပမာ ၂။ ကိန်းပြည့်များအစု

၈.၃.၃ ဗလာအစု

အစုဝင်တစ်ခုမျှမပါဝင်သည့် အစုကို **ဗလာအစု** (empty set) ဟုခေါ်သည်။ သင်္ကေတအားဖြင့် "$\varnothing$" ဖြင့်ရေးပြီး ဗလာအစုဟုဖတ်သည်။ ဗလာအစုသည် ကန့်သတ်ရှိအစု ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ 4 ဖြင့်စား၍ပြတ်သော သုဒ္ဓကိန်းများ အစု

ဥပမာ ၂။ 4 နှင့် 5 ကြားရှိသဘာဝကိန်းများအစု

၈.၃.၄ စကြဝဠာအစု

ဆွေးနွေးချက်တစ်ခု (တစ်နည်း) အခြေအနေတစ်ခုတွင် ပါဝင်သော အစုဝင်အားလုံး၏ အစုကို **စကြဝဠာအစု** (universal set) ဟုခေါ်သည်။ သင်္ကေတအားဖြင့် **S** ဟုရေးသည်။

ဥပမာ။ A = {a, b, c, d, p, q} ဖြစ်လျှင် စကြဝဠာအစုကို အင်္ဂလိပ်အက္ခရာများအစု {a, b, c, d, p, q, z} သို့မဟုတ် {a, b, c, d, p, q} သို့မဟုတ် {a, b, c, d, e, f, p, q} စသည်ဖြင့် ယူနိုင်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၈.၃

၁။ အောက်ပါအစုများတွင် မည်သည်တို့သည် ကန့်သတ်ရှိအစုများဖြစ်၍ မည်သည်တို့သည် ကန့်သတ်မဲ့အစုများ ဖြစ်ကြသနည်း။

(က) 64 ကိုစား၍ပြတ်သော စားကိန်းများအစု

(ခ) 4 ၏ဆတိုးကိန်းများအစု

(ဂ) ခုနေရာတွင် 6 ဂဏန်းရှိသော သဘာဝကိန်းများအစု

(ဃ) 0 ထက်ကြီးသောကိန်းစစ်များအစု

(င) 20 နှင့် 50 ကြားရှိ စုံကိန်းများအစု

(စ) သဘာဝကိန်းတစ်ခု၏ သုံးထပ်ကိန်းဖြစ်ပြီး 1000 အောက်ငယ်သောကိန်းများအစု

(ဆ) ဗလာအစု

၂။ အောက်ပါအစုများတွင် မည်သည်တို့သည် ဗလာအစုဖြစ်သနည်း။

(က) ကျောင်းစာကြည့်တိုက်ရှိ သင်္ချာစာအုပ်များအစု

(ခ) ညီမျှခြင်း $2x = 3$ ကိုပြေလည်စေမည့် ကိန်းပြည့်များအစု

(ဂ) သုဒ္ဓကိန်းလည်းဖြစ်၍ စုံကိန်းလည်းဖြစ်သော ကိန်းများအစု

(ဃ) A = { x | x သည် 2 ဖြင့် စား၍ပြတ်သော အပေါင်းမကိန်း}

(င) $C = \{ x \mid x \in Q , x^2 - 3 = 0\}$

၃။ အောက်ပါအစုတို့တွင် မည်သည့်အစုသည် စကြဝဠာအစု ဖြစ်သနည်း။

(က) အပေါင်း စုံကိန်းများအစု (ခ) အပေါင်း မကိန်းများအစု (ဂ) သဘာဝကိန်းများအစု

(ဃ) အနုတ်ကိန်းများအစု (င) ကိန်းပြည့်များအစု

၄။ အောက်ပါအစုတို့တွင် မည်သည့်အစုသည် စကြဝဠာအစု ဖြစ်သနည်း။

(က) $A = \{4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 9\}$, $C = \{0, 2, 5, 7\}$,

$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(ခ) $W = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{c, d, f\}$, $Z = \{e, g\}$

၈.၄ အစုပိုင်းများ၊တူညီသောအစုများ

၈.၄.၁ အစုပိုင်းများ (Subsets)

အစု A ၏ အစုဝင်တိုင်းသည် အစု B ၏ အစုဝင်ဖြစ်နေလျှင် အစု A သည် အစု B ၏ အစုပိုင်း ဖြစ်သည်ဟုဆိုသည်။

ဤအကြောင်းအရာကို သင်္ကေတအားဖြင့် $A \subset B$ ဟုရေးသားပြီး **"A သည် B ၏ အစုပိုင်းဖြစ်သည်"** (A subset B) ဟုဖတ်သည်။

မှတ်ချက် ၁။ မည်သည့်အစု A အတွက်မဆို အစု A သည် ယင်းအစု A ကိုယ်တိုင်၏ အစုပိုင်း ဖြစ်သည်။ သင်္ကေတအားဖြင့်ဖော်ပြလျှင် $A \subset A$ ဖြစ်သည်။

၂။ ဗလာအစုတွင် အစုဝင်မရှိချေ။ ဗလာအစုသည် အစုတိုင်း၏ အစုပိုင်းဖြစ်သည်။ သင်္ကေတအားဖြင့် မည်သည့်အစု A အတွက်မဆို $\varnothing \subset A$ ဟုရေးသည်။

၃။ x သည် အစု A ၏အစုဝင်တစ်ခုဖြစ်လျှင် $\{x\} \subset A$ ဖြစ်သည်။

၄။ အခြေအနေတစ်ခုတွင် စဉ်းစားသော အစုအားလုံးသည် စကြဝဠာအစု၏အစုပိုင်းများ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$

အစု A ၏ အစုဝင်တိုင်းသည် အစု B ၏ အစုဝင်ဖြစ်နေသောကြောင့် $A \subset B$ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၂။ $P = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

အစု P ၏ အစုဝင် 2 သည် အစု Q ၏ အစုဝင်မဖြစ်သောကြောင့် P သည် Q ၏အစုပိုင်း မဟုတ်ပေ။ သင်္ကေတအားဖြင့် $P \not\subset Q$ ဟုရေးသားပြီး **"P သည် Q ၏ အစုပိုင်းတစ်ခုမဟုတ်"** (P is not a subset of Q) ဟုဖတ်သည်။

ဥပမာ ၃။ $\{1, 2, 3\}$ ၏ အစုပိုင်းများကို ရေးပါ။
$\{1, 2, 3\}$ ၏အစုပိုင်းများမှာ $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$

ဥပမာ ၄။ $P = \{1, 5, 3, 7, 9\}$, $Q = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
အစု P ၏ အစုဝင်တိုင်းသည် အစု Q ၏ အစုဝင်ဖြစ်ပြီး အစု Q ၏ အစုဝင်တိုင်းသည် အစု P ၏ အစုဝင် ဖြစ်သည်။ ဤတွင် $P \subset Q$ နှင့် $Q \subset P$ ဖြစ်သည်။

၈.၄.၂ အစုများတူညီခြင်း

အစုတစ်ခုတွင်ပါဝင်သော အစုဝင်များသည် အခြားအစုတစ်ခုတွင်ပါဝင်သော အစုဝင်များနှင့် အချင်းချင်း တူညီကြလျှင် ထိုအစုနှစ်ခု တူညီသည်ဟုဆိုသည်။

သင်္ကေတအားဖြင့် အစု A နှင့် အစု B တူညီကြလျှင် $A = B$ ဟုရေးသည်။

ဥပမာ ၁။ $\{x, y, z\} = \{y, z, x\}$

ဥပမာ ၂။ $A = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots\}$, $B = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$ ဖြစ်လျှင် $A = B$ ဖြစ်သည်။

မှတ်ချက် ။ $A = B$ ဖြစ်လျှင် $A \subset B$ နှင့် $B \subset A$ ဖြစ်ပြီး အပြန်အလှန်အားဖြင့်လည်း မှန်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၈.၄

၁။ အောက်ပါဖော်ပြချက်များတွင် မည်သည်တို့သည် မှန်၍ မည်သည်တို့သည် မှားသနည်း။
(က) $c \in \{c, f, j\}$ (ခ) $\{a\} \subset \{a, b, c\}$
(ဂ) $\{a\} \subset \{a\}$ (ဃ) $\{0, 1\} \in \{0, 1, 2\}$
(င) $\{x, y, z\} \subset \{x, y\}$

၂။ အောက်ပါကွက်လပ်များတွင်သင်္ကေတ $\subset$ သို့မဟုတ် $\not\subset$ ကိုမှန်ကန်အောင် ဖြည့်စွက်ပါ။
(က) $\{-1, 0, 1\}$ ___ $\{-1, 0, 2\}$ (ခ) $\{-1, 0, 1\}$ ___ $\{0, -1, 1\}$
(ဂ) $\{1, 3, 6, 7\}$ ___ $\{3, 5, 7, 9, 6, 11\}$ (ဃ) $\varnothing$ ___ $\{0\}$

၃။ $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $Y = \{0, -1, 2, -2, 1\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-3, -1, 2\}$
$C = \{-1, 1, 0\}$, $D = \{-1, 1, 2\}$, $E = \{-2, -1\}$ ဟုထားပါ။
(က) X, Y, A, B, C, D, E တို့မှ မည်သည့်အစုသည် A ၏အစုပိုင်း ဖြစ်သနည်း။
(ခ) X နှင့် Y တို့သည် တူညီပါသလား။

၄။ $A = \{ x \mid x^2 + x - 6 = 0\}$ နှင့် $B = \{-3, 2\}$ ဖြစ်လျှင် $A = B$ ဖြစ်ပါသလား။

၅။ A သည် 10 အောက်ငယ်သောသုဒ္ဓကိန်းများအစု နှင့် $B = \{ x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$ ဖြစ်လျှင်

(က) $A = B$ ဖြစ်ပါသလား။ (ခ) $B \subset A$ ဖြစ်ပါသလား။

၆။ အောက်ပါအစုများ၏ အစုပိုင်းအားလုံးကို ရေးပါ။

(က) $\{-1, 1\}$ (ခ) $\{0, 1, 2\}$

(ဂ) $\{x, y, z\}$ (ဃ) $\{a, b, c, d\}$

၇။ မေးခွန်း (၆) တွင်ပေးထားသောအစုများ၌ အစုပိုင်းမည်မျှစီ ရှိသနည်း။

၈.၅ အစုလုပ်ထုံးများ

၈.၅.၁ အစုများဖြတ်ခြင်း

အစု A နှင့် အစု B နှစ်ခုစလုံးတွင်ပါဝင်သော ဘုံအစုဝင်အားလုံးဖြင့် ဖွဲ့စည်းထားသည့် အစုကို A နှင့် B ဖြတ်ခြင်းဖြင့်ရရှိသောအစုဟုခေါ်သည်။

သင်္ကေတအားဖြင့် $A \cap B$ ဟုရေးပြီး (A intersection B) ဟုဖတ်သည်။

$$\boxed{A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}}$$

ဥပမာ ၁။ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ နှင့် $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ ဖြစ်လျှင် $A \cap B$ ကို ရှာပါ။

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$

ထို့ကြောင့် $A \cap B = \{4, 5, 6\}$

ဥပမာ ၂။ A သည် 1 နှင့် 9 ကြားရှိစုံကိန်းများအစုနှင့် $B = \{x \mid x^3 - 8x^2 + 12x = 0\}$ ဖြစ်လျှင် $A \cap B$ ကို ရှာပါ။

$A = \{2, 4, 6, 8\}$

$$x^3 - 8x^2 + 12x = 0$$
$$x(x^2 - 8x + 12) = 0$$
$$x(x-2)(x-6) = 0$$

$x = 0$ သို့မဟုတ် $x = 2$ သို့မဟုတ် $x = 6$

$B = \{0, 2, 6\}$

ထို့ကြောင့် $A \cap B = \{2, 6\}$

ဥပမာ ၃။ A သည် အပြည့် စုံကိန်းများအစုနှင့်
$B = \{x \mid x$ သည် 3 ဖြင့်စား၍ပြတ်သောအပြည့်ကိန်း$\}$ ဖြစ်လျှင်
$A \cap B$ ကို ရှာပါ။

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}$

$B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \dots\}$

ထို့ကြောင့် $A \cap B = \{0, 6, 12, 18, 24, \dots\}$

မှတ်ချက် ။ A ၏အစုဝင်များသည် 2 ၏ဆတိုးကိန်းများဖြစ်ပြီး B ၏အစုဝင်များသည် 3 ၏ ဆတိုးကိန်းများဖြစ်သောကြောင့် $A \cap B$ ၏ အစုဝင်များသည် 6 ၏ဆတိုးကိန်းများ ဖြစ်သည်။

၈.၅.၂ အစုများနှောခြင်း

အစု A သို့မဟုတ် အစု B တစ်ခုခုထဲတွင်ပါဝင်သော အစုဝင်များအားလုံး၏အစုကို A နှင့် B နှောခြင်းဖြင့်ရရှိသော အစုဟုခေါ်သည်။

သင်္ကေတအားဖြင့် $\mathbf{A \cup B}$ ဟုရေးပြီး (A union B) ဟုဖတ်သည်။

$$\mathbf{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}}$$

ဥပမာ။ A သည် 13 အောက်ငယ်သောအပေါင်း စုံကိန်းများ အစုနှင့်
$B = \{x \mid x \in N, x < 20,\ x$ သည် 3 ဖြင့်စား၍ပြတ်သောအပြည့်ကိန်း$\}$ ဖြစ်လျှင်
$A \cup B$ ကို ရှာပါ။

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

ထို့ကြောင့် $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18\}$

၈.၅.၃ အစုနှစ်ခုခြားနားခြင်း (Difference of Two Sets)

အစု A ထဲတွင်ရှိပြီး အစု B ထဲတွင်မပါဝင်သော အစုဝင်များအားလုံး၏အစုကို A မှ B ခြားနားခြင်း အစုဟုခေါ်သည်။

သင်္ကေတအားဖြင့် $\mathbf{A \setminus B}$ ဟုရေးပြီး (A difference B) ဟုဖတ်သည်။

$$\mathbf{A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}}$$

$A \setminus B$ ကိုအောက်ပါအဆင့်များဖြင့်ရှာနိုင်သည်။

အဆင့် ၁။ A ၏အစုဝင်များကို ရေးပါ။

အဆင့် ၂။ ယင်းအစုဝင်များမှ B ထဲတွင်ပါဝင်သော အစုဝင်များကို ဖယ်ပါ။

အဆင့် ၃။ ကျန်ရှိသောအစုဝင်များ၏အစုသည် $A \setminus B$ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ။ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ နှင့် $B = \{4, 8, 12, 16\}$ ဖြစ်လျှင်

(က) $A \setminus B$ (ခ) $B \setminus A$ ကို ရှာပါ။

(က) $A \setminus B$ ကိုရှာရန် A ထဲရှိအစုဝင်များ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 မှ B ထဲတွင် ပါဝင်သော အစုဝင် 4 ကို ဖယ်လျှင် 1, 2, 3, 5, 6, 7 ကျန်သည်။

ထို့ကြောင့် $A \setminus B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$

(ခ) $B \setminus A$ ကိုရှာရန် B ထဲရှိအစုဝင်များ 4, 8, 12, 16 မှ A ထဲတွင် ပါဝင်သော အစုဝင် 4 ကို ဖယ်လျှင် 8, 12, 16 ကျန်သည်။

ထို့ကြောင့် $B \setminus A = \{8, 12, 16\}$

၈.၅.၄ ဖြည့်ဖက်အစု (Complement of a Set)

S သည် စကြဝဠာအစုဖြစ်ပြီး A သည် အစုတစ်ခုဖြစ်လျှင် $S \setminus A$ ကို အစု A ၏ဖြည့်ဖက်အစု ဟုခေါ်သည်။

သင်္ကေတအားဖြင့် "A'"ဟုရေးပြီး (A prime) ဟုဖတ်သည်။

ထို့ကြောင့် $A' = S \setminus A$ ဖြစ်သည်။

$$A' = \{x \mid x \in S \text{ and } x \notin A\}$$

ဥပမာ။ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ နှင့် $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ဖြစ်လျှင် အောက်ပါအစုများကို ရှာပါ။

(က) A' (ခ) $A' \cap A$ (ဂ) $A' \cup A$

(ဃ) $(A')'$ (င) $\varnothing'$ (စ) S'

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(က) $A' = S \setminus A = \{2, 4, 6, 8\}$

(ခ) $A' \cap A = \varnothing$

(ဂ) $A' \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(ဃ) $(A')' = S \setminus A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(င) $\varnothing' = S \setminus \varnothing = S$

(စ) $S' = S \setminus S = \varnothing$

မှတ်ချက် ။ အထက်ပါဥပမာမှ အောက်ပါဂုဏ်သတ္တိများ မှန်ကြောင်းတွေ့ရသည်။

၁။ $A' \cap A = \varnothing$

၂။ $A' \cup A = S$

၃။ $(A')' = A$

၄။ $\varnothing' = S$

၅။ $S' = \varnothing$

လေ့ကျင့်ခန်း ၈.၅

၁။ $A = \{-1, 0, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, -3\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$ ဖြစ်သည်။ အောက်ပါတို့ကို ရှာပါ။

(က) $A \cup B$ (ခ) $B \cup C$ (ဂ) $A \cup C$ (ဃ) $A \cap B$

(င) $C \cap A$ (စ) $B \cap C$ (ဆ) $(A \cup B) \cup C$ (ဇ) $A \cup (B \cup C)$

(ဈ) $(A \cap B) \cap C$ (ည) $A \cap (B \cap C)$

၂။ A သည် သဘာဝကိန်းများအစုနှင့် B သည် ကိန်းပြည့်များအစုဖြစ်လျှင် $A \cup B$ နှင့် $A \cap B$ တို့ကို ရှာပါ။

၃။ A သည်ထောင့်မှန်စတုဂံများအစုဖြစ်၍ B သည်အနားပြိုင်စတုဂံများအစုဖြစ်လျှင် $A \cap B$ နှင့် $A \cup B$ တို့ကိုရှာပါ။

၄။ $A = \{ x \mid x \in N$, x သည် 3 ဖြင့်စား၍ပြတ်သောကိန်း$\}$ နှင့်
$B = \{ x \mid x \in N$, x သည် 5 ဖြင့်စား၍ပြတ်သောကိန်း$\}$ ဖြစ်လျှင်
(က) $A \cup B$ (ခ) $A \cap B$ တို့ကို ရှာပါ။

၅။ အောက်ပါတို့မှ $A \setminus B$ နှင့် $B \setminus A$ တို့ကို ရှာပါ။

(က) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 5\}$

(ခ) $A = \{p, q, r, s, t\}$, $B = \{x, y, z\}$

(ဂ) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

၆။ စကြဝဠာအစုသည် သဘာဝကိန်းများအစုဖြစ်ပြီး T သည် စုံကိန်းများအစုဖြစ်လျှင် T ၏ ဖြည့်ဖက်အစုကို စာဖြင့်ဖော်ပြပါ။

၇။ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ဖြစ်လျှင်
(က) A' (ခ) B' (ဂ) $A' \cap B'$ (ဃ) $A \cup B$ (င) $(A \cup B)'$ တို့ကိုရှာပါ။

၈။ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$ ဖြစ်လျှင် A', B' နှင့် C' တို့ကို ရှာပါ။ အောက်ပါအချက်တို့တွင် မည်သည့်အချက်သည် မှန်၍ မည်သည့်အချက်သည် မှားသည်ကိုဖော်ပြပါ။

(က) $A \cap A' = \varnothing$ (ခ) $A \cup A' = \varnothing$ (ဂ) $A \subset B$
(ဃ) $B \subset A$ (င) $A' \subset B'$ (စ) $B' \subset A'$
(ဆ) $B' = C$ (ဇ) $B \subset C'$ (ဈ) $S = A \cup B \cup C$

၈.၆ ကြားပိုင်းများ (Intervals)

ကိန်းစစ်မျဉ်းပေါ်ရှိ တစ်ဆက်တည်းဖြစ်သော အမှတ်များ၏အစုကို ကြားပိုင်းဟုခေါ်သည်။

၈.၆.၁ ကြားပိုင်းပွင့် (Open Interval)

a နှင့် b တို့ ကြားရှိ အမှတ်များအားလုံးပါဝင်သောအစုကို **ကြားပိုင်းပွင့်** ဟုခေါ်ပြီး သင်္ကေတအားဖြင့် $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ ဟုရေးသည်။

a နှင့် b တို့ကို ထိုကြားပိုင်းပွင့်၏ အစွန်းမှတ်များ ဟုခေါ်သည်။

ဥပမာ။ $(-2, 3) = \{x \mid -2 < x < 3\}$

၈.၆.၂ ကြားပိုင်းပိတ် (Close Interval)

အစွန်းမှတ် a နှင့် b နှစ်ခုလုံးပါဝင်ပြီး a နှင့် b တို့ကြားရှိ အမှတ်များအားလုံးပါဝင်သည့် ကြားပိုင်းကို **ကြားပိုင်းပိတ်** ဟုခေါ်ပြီး သင်္ကေတအားဖြင့် $[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$ ဟုရေးသည်။

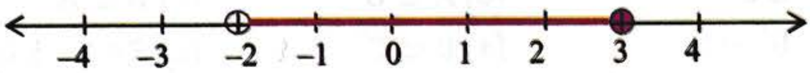
ဥပမာ။ $[-2, 3] = \{x \mid -2 \le x \le 3\}$

၈.၆.၃ တစ်ဖက်ပွင့်ကြားပိုင်း သို့မဟုတ် တစ်ဖက်ပိတ်ကြားပိုင်း

အစွန်းမှတ် a သို့မဟုတ် b တစ်ဖက်တည်းသာပါဝင်ပြီး a နှင့် b တို့ကြားရှိ အမှတ်များအားလုံးပါဝင်သောအစုကို **တစ်ဖက်ပွင့်ကြားပိုင်း သို့မဟုတ် တစ်ဖက်ပိတ်ကြားပိုင်း** (half-open interval or half -closed interval) ဟုခေါ်သည်။

သင်္ကေတအားဖြင့် $(\mathbf{a},\mathbf{b}]=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{a}<\mathbf{x}\le \mathbf{b}\}$ နှင့် $[\mathbf{a},\mathbf{b})=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{a}\le \mathbf{x}<\mathbf{b}\}$ ဟုရေးသည်။

ဥပမာ ၁။ $(-2,3]=\{x\mid -2<x\le 3\}$



$[-2,3)=\{x\mid -2\le x<3\}$

ဥပမာ ၂။ အောက်ပါကြားပိုင်းတို့ကို ကိန်းစစ်မျဉ်းပေါ်တွင် ဖော်ပြပါ။

(က) $\mathbf{A}=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\ge 1\}$ (ခ) $\mathbf{B}=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{x}<4\}$ (ဂ) $A\cup B$ (ဃ) $A\cap B$

(က) 

$\mathbf{A}=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{x}\ge 1\}$

(ခ) 

$\mathbf{B}=\{\mathbf{x}\mid \mathbf{x}<4\}$

(ဂ) 

$A\cup B$

(ဃ) 

$A\cap B$

လေ့ကျင့်ခန်း ၈.၆

၁။ အောက်ပါတို့ကို အစုတည်ဆောက်သည့်ပုံစံဖြင့် ရေးပါ။

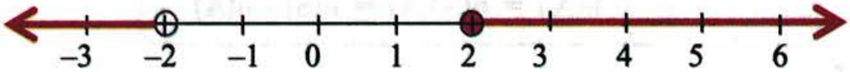
(က) 

(ခ) 

(ဂ) 

(ဃ) 

(င) 

(စ) 

၂။ အောက်ပါအစုများကို ကိန်းစစ်မျဉ်းပေါ်တွင်ဖော်ပြပါ။

(က) $\{x \mid x > 2\}$ (ခ) $\{x \mid x \geq 3\}$ (ဂ) $\{x \mid x > -1\}$

(ဃ) $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ (င) $\{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$ (စ) $\{x \mid x \leq 0 \text{ or } x > 2\}$

၃။ အောက်ပါတို့၏အဖြေစုကို ကိန်းစစ်မျဉ်းပေါ်တွင်ဖော်ပြပါ။

(က) $x - 1 < 4$ (ခ) $x + 2 > 0$ (ဂ) $x - 1 \leq 0$ (ဃ) $-4 < x < 4$

(င) $2x \leq 5$ (စ) $2x - 1 > 7$ (ဆ) $\frac{1}{3}(1 - x) < 1$

၄။ အောက်ပါအစုတို့ကို ကိန်းစစ်မျဉ်းပေါ်တွင်ဖော်ပြပါ။

(က) $U = \{x \mid x \geq 3\}$ (ခ) $V = \{x \mid x \leq -2\}$ (ဂ) $U \cap V$ (ဃ) $U \cup V$

၅။ အောက်ပါအစုတို့ကို ကိန်းစစ်မျဉ်းပေါ်တွင်ဖော်ပြပါ။

(က) $Y = \{x \mid x > -4\}$ (ခ) $Z = \{x \mid x < 3\}$ (ဂ) $Y \cup Z$ (ဃ) $Y \cap Z$

၆။ $P = \{ x \mid x \in J, -1 < x < \frac{3}{5} \}$ နှင့် $Q = \{x \mid x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$ ဖြစ်လျှင် $P = Q$ ဖြစ်ပါသလား။

၇။ X သည် 7 အောက်ငယ်သော အပေါင်း စုံကိန်းများအစုဖြစ်၍ $Y = \{ x \mid x \in J, -3 \le x \le 4\}$ ဖြစ်လျှင် $X \cup Y$ ကိုရှာပါ။

၈။ $P = \{ x \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$ နှင့် $T = \{ x \mid x \in J, -1 \le x \le 4\}$ ဖြစ်လျှင် $P \cap T$ နှင့် $P \cup T$ တို့ကို ရှာပါ။

၈.၇ အစုတစ်ခု၏အစုဝင်အရေအတွက်

ကြိုက်ရာအစု A အတွက် **A ၏အစုဝင်အရေအတွက်** (the number of elements in A) ကို **"n(A)"** ဖြင့် ဖော်ပြပြီး (n of A) ဟုဖတ်သည်။

S သည် စကြဝဠာအစုဖြစ်ပြီး A သည် အစုတစ်ခုဖြစ်လျှင်

$$\boxed{n(A') = n(S \setminus A) = n(S) - n(A)}$$

ဖြစ်သည်။

သိအိုရမ်

A နှင့် B တို့သည် အစုနှစ်ခုဖြစ်လျှင်

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, e, i, o, u, w, y\}$ ဖြစ်လျှင် $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ဖြစ်ကြောင်း ချိန်ကိုက်ပြပါ။

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, i, o, u, w, y\}$, $A \cap B = \{a, e\}$

$n(A \cup B) = 11$, $n(A) = 6$, $n(B) = 7$, $n(A \cap B) = 2$

$$\begin{aligned} n(A) + n(B) - n(A \cap B) &= 6 + 7 - 2 \\ &= 11 \\ &= n(A \cup B) \end{aligned}$$

ဥပမာ ၂။ စကြဝဠာအစုတွင် အစုဝင်အရေအတွက် 500 ရှိပြီး အစု A နှင့် B တို့အတွက် $n(A) = 240$, $n(A \cup B) = 460$, $n(A \cap B) = 55$ ဖြစ်လျှင် $n(B')$ ကို ရှာပါ။

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$460 = 240 + n(B) - 55$$
$$n(B) = 275$$
$$n(B') = n(S \setminus B) = n(S) - n(B) = 500 - 275 = 225$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၈.၇

၁။ $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 6, 8, 10\}$ ဖြစ်လျှင်
(က) $(A \cap B)$ နှင့် $(A \cup B)$ ကို ရှာပါ။
(ခ) $n(A \cap B)$ နှင့် $n(A \cup B)$ ကို ရှာပါ။

၂။ $n(A) = 12$, $n(B) = 17$, $n(A \cup B) = 21$ ဖြစ်လျှင် $n(A \cap B)$ ကို ရှာပါ။

၃။ $n(S) = 34$, $n(A) = 26$ ဖြစ်လျှင် $n(A')$ ကို ရှာပါ။

၄။ $n(S) = 38$, $n(A) = 16$, $n(A \cap B) = 12$, $n(B') = 20$ ဖြစ်လျှင် $n(A \cup B)$ ကို ရှာပါ။

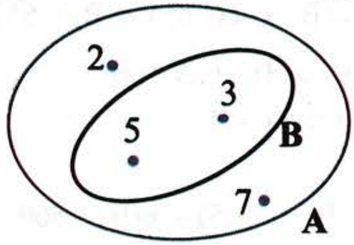
၈.၈ Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့်ဖော်ပြခြင်း

Venn သရုပ်ပြပုံကို အစုများဖော်ပြရာ၌ အသုံးပြုသည်။ အစုတစ်ခုတွင်ပါဝင်သော အစုဝင်အရေအတွက်နည်းပါက မျဉ်းကွေးပိတ်တစ်ခုအတွင်း၌ အစုဝင်တစ်ခုစီကို အစက်တစ်ခုစီဖြင့် ကိုယ်စားပြုဖော်ပြလေ့ရှိသည်။

ပုံတွင်အစုဝင်လေးခု 2, 3, 5, 7 ပါသောအစု A ကိုဖော်ပြသည်။

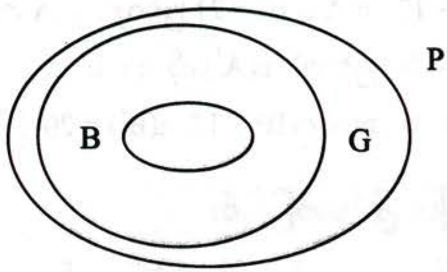
ပုံတွင်အစုဝင်နှစ်ခု 3, 5 ပါသောအစု B ကိုဖော်ပြသည်။

အထက်ဖော်ပြပါ အစုနှစ်ခု A နှင့် B တို့တွင် $B \subset A$ ဖြစ်ကြောင်းတွေ့ရသည်။ ယင်းအချက်ကို Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့် အောက်ပါအတိုင်း ဖော်ပြနိုင်သည်။



$B \subset A$

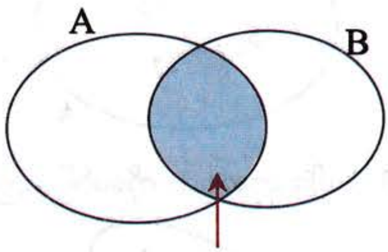
ဥပမာ။ P = စာသင်ခန်းတစ်ခုအတွင်းရှိ ကျောင်းသား ကျောင်းသူများ အစု
G = ယင်းစာသင်ခန်းအတွင်းရှိ မျက်မှန်တပ်သည့်ကျောင်းသား ကျောင်းသူများအစု
B = ယင်းစာသင်ခန်းအတွင်းရှိ မျက်မှန်တပ်သည့်ကျောင်းသားများအစုဖြစ်လျှင်
အစု B, G နှင့် P တို့၏ဆက်သွယ်မှုကို Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့် ဖော်ပြပါ။



$B \subset G \subset P$

၈.၈.၁ အစုများဖြတ်ခြင်းကိုသရုပ်ပြပုံနှင့်ဖော်ပြခြင်း

အစု A နှင့် B တို့ဖြတ်ခြင်းဖြင့် ရလာသောအစု $A \cap B$ ကိုအောက်ပါ Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့် ဖော်ပြသည်။

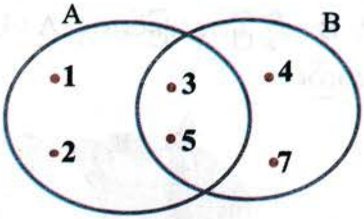


$A \cap B$

ဥပမာ ၁။ $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 7\}$ ဖြစ်လျှင် $A \cap B$ ကို Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့် ဖော်ပြပါ။

$A = \{1, 2, 3, 5\}$,

$B = \{3, 4, 5, 7\}$



$A \cap B = \{3, 5\}$

ဥပမာ ၂။ F သည် 12 အောက်ငယ်သောသုဒ္ဓကိန်းများအစုနှင့် G သည် 2 နှင့် 8 ကြားရှိ မကိန်းများအစုဖြစ်လျှင်

(က) $F \cap G$ ကိုရှာပြီး Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့် ဖော်ပြပါ။

(ခ) $H = \{2, 11\}$ ဖြစ်လျှင် $H \cap G$ ကို ရှာပါ။

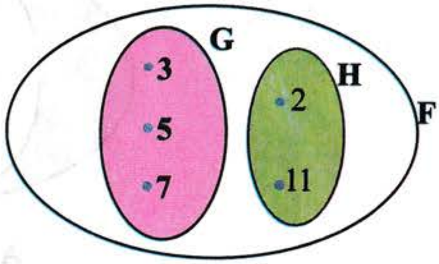
(က) $F = \{2, 3, 5, 7, 11\}$,

$G = \{3, 5, 7\}$

$F \cap G = \{3, 5, 7\}$

$G \subset F$ ဖြစ်သဖြင့်

$F \cap G = G$ ဖြစ်သည်။



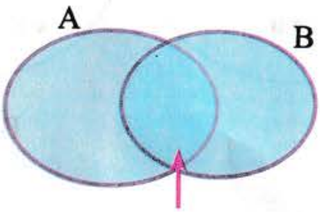
(ခ) $H = \{2, 11\}$, $G = \{3, 5, 7\}$

$H \cap G = \varnothing$

ဤသို့သော အစု H နှင့် အစု G တို့ကို **အဆက်ပြတ်အစုများ** (disjoint sets) ဟုခေါ်သည်။

၈.၈.၂ အစုများပေါင်းခြင်းကိုသရုပ်ပြပုံဖြင့်ဖော်ပြခြင်း

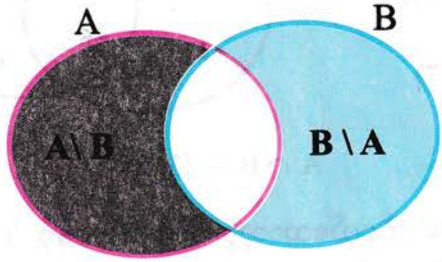
အစု A နှင့် B တို့ပေါင်း၍ ရလာသော အစု $A \cup B$ ကိုအောက်ပါ Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့်ဖော်ပြသည်။



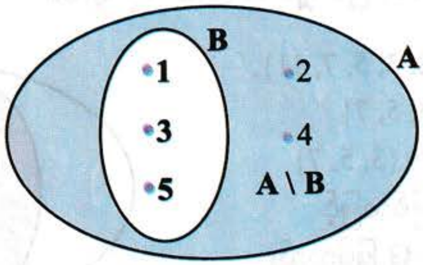
$A \cup B$

၈.၈.၃ အစုနှစ်စုခြားနားခြင်းကိုသရုပ်ပြပုံဖြင့်ဖော်ပြခြင်း

အစု A နှင့် B တို့ ခြားနားခြင်းအစု $A \setminus B$ သို့မဟုတ် $B \setminus A$ ကို အောက်ပါ Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့်ဖော်ပြသည်။

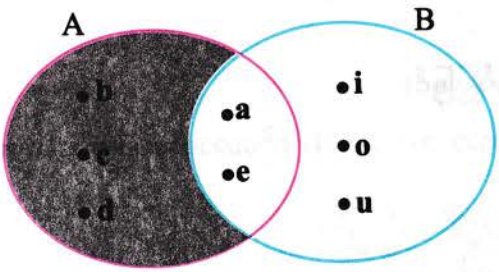


ဥပမာ ၁။ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ ဖြစ်လျှင် $A \setminus B$ ကို Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့် ဖော်ပြပါ။

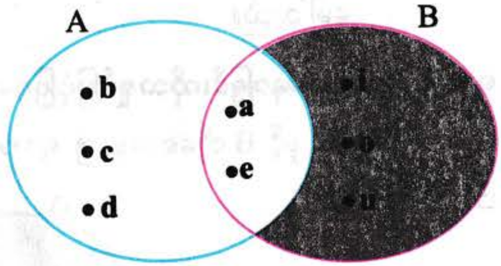


$A \setminus B = \{2, 4\}$

ဥပမာ ၂။ $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$ ဖြစ်လျှင် $A \setminus B$ နှင့် $B \setminus A$ ကို Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့်ဖော်ပြပါ။



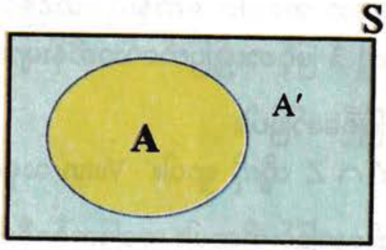
$A \setminus B = \{b, c, d\}$



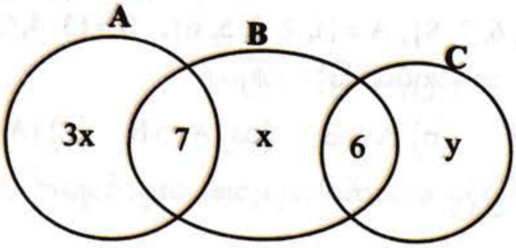
$B \setminus A = \{i, o, u\}$

၈.၈.၄ အစုတစ်ခု၏ဖြည့်ဖက်အစုကိုသရုပ်ပြပုံဖြင့်ဖော်ပြခြင်း

အစု A ၏ ဖြည့်ဖက်အစု A' ကို အောက်ပါ Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့်ဖော်ပြသည်။



ဥပမာ ။ A, B နှင့် C တို့သည် $A \cup B \cup C = S$ ဖြစ်စေမည့်အစုများဖြစ်သည်။ ပုံတွင်ဖော်ပြထားသော $3x$, 7, x, 6, y တို့သည် အစုအသီးသီးထဲရှိ အစုဝင်အရေအတွက်များကို ဖော်ပြထားခြင်းဖြစ်သည်။



(က) $n(A) = n(B)$ ဖြစ်လျှင် x တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

(ခ) $n(A \cup B)' = n(A \cap B)$ ဖြစ်လျှင် y တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

(ဂ) $n(S)$ ကို ရှာပါ။

(က)
$$\begin{aligned} n(A) &= n(B) \\ 3x + 7 &= 7 + x + 6 \\ 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

(ခ)
$$\begin{aligned} n(A \cup B)' &= n(A \cap B) \\ y &= 7 \end{aligned}$$

(ဂ)
$$\begin{aligned} n(S) &= 3x + 7 + x + 6 + y \\ &= 4x + 13 + y \\ &= 12 + 13 + 7 = 32 \end{aligned}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၈.၈

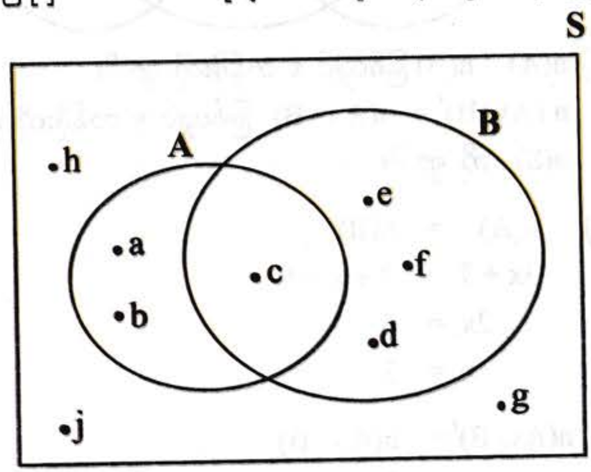
၁။ X သည် 9 အောက်ငယ်သော အပေါင်း စုံကိန်းများအစု၊
Y သည် 9 အောက်ငယ်သော အပေါင်း မကိန်းများအစုနှင့်
Z သည် 1 နှင့် 10 ကြားရှိ 3 ဖြင့်စား၍ပြတ်သောကိန်းများအစု ဖြစ်လျှင်

(က) X, Y, Z ကိုစာရင်းပြုစုဖော်ပြပါ။
(ခ) $X \cap Y, X \cap Z, Y \cap Z$ တို့ကို ရှာပါ။ Venn သရုပ်ပြပုံများသုံး၍လည်းဖော်ပြပါ။

၂။ အောက်ဖော်ပြပါအစုတို့၏နှောခြင်းကိုရှာပါ။ အဖြေတစ်ခုစီကို Venn သရုပ်ပြပုံဖြင့်ဖော်ပြပါ။
(က) $A = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
(ခ) $P = \{p, q, r, s, t\}$, $Q = \{m, n, o, p, q\}$
(ဂ) $W = \{a, b, c\}$, $T = \{a, b\}$

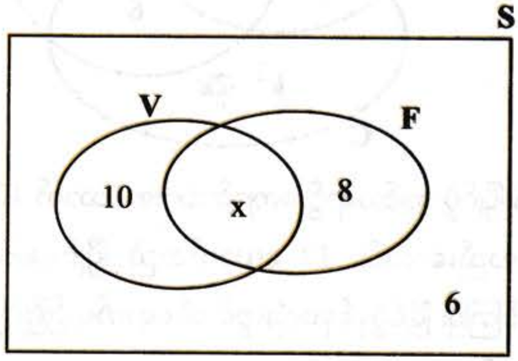
၃။ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 6, 8\}$ ဖြစ်လျှင် အောက်ပါ အစုများကို Venn သရုပ်ပြပုံများဖြင့်ဖော်ပြပါ။
(က) A' (ခ) B' (ဂ) $A \cup B$ (ဃ) $A \cap B$ (င) $(A \cup B)'$ (စ) $(A \cap B)'$

၄။ ပေးထားသော သရုပ်ပြပုံမှ အောက်ပါအစုများ၏ အစုဝင်များကို စာရင်းပြုစုပါ။



(က) S (ခ) A (ဂ) B (ဃ) A' (င) B' (စ) $A \setminus B$
(ဆ) $B \setminus A$ (ဇ) $A \cup B$ (ဈ) $A \cap B$ (ည) $(A \cup B)'$ (ဋ) $(A \cap B)'$

၅။ S = စာသင်ခန်းတစ်ခုရှိ ကျောင်းသားများအစု၊ F = ဘောလုံးကစားခြင်းကိုနှစ်သက်သော ကျောင်းသားများအစု နှင့် V = ဘော်လီဘောကစားခြင်းကိုနှစ်သက်သော ကျောင်းသားများအစုတို့ဖြစ်ကြသည်။ အစုအသီးသီး၏ အစုဝင်အရေအတွက်ကို သရုပ်ပြပုံတွင်ဖော်ပြထားသည်။ စာသင်ခန်းထဲတွင် ကျောင်းသားအရေအတွက် 30 ယောက်ရှိလျှင်



(က) x ၏တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

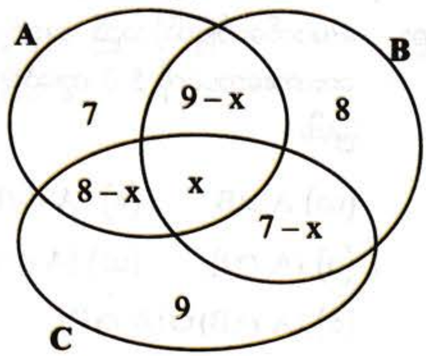
(ခ) ဘော်လီဘောကစားခြင်းကိုနှစ်သက်သော ကျောင်းသားမည်မျှရှိမည်နည်း။

(ဂ) ဘောလုံးကစားခြင်းကိုမနှစ်သက်သော ကျောင်းသားမည်မျှရှိမည်နည်း။

၆။ A, B, C တို့သည် စကြဝဠာအစု $A\cup B\cup C = S$ ဖြစ်စေမည့်အစုများဖြစ်သည်။ အစုအသီးသီး၏ အစုဝင်အရေအတွက်ကို သရုပ်ပြပုံတွင်ဖော်ပြထားသည်။

(က) $n(S) = 34$ ဖြစ်လျှင် x တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

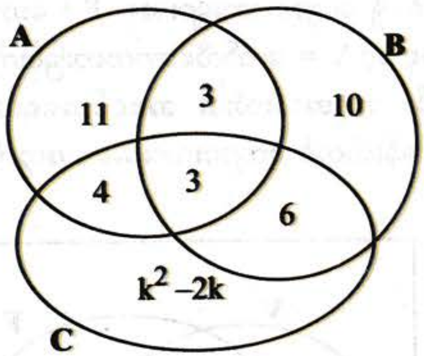
(ခ) $n(A\cap B\cap C')$ ကို ရှာပါ။



၇။ A, B, C တို့သည် စကြဝဠာအစု $A\cup B\cup C = S$ ဖြစ်စေမည့်အစုများဖြစ်သည်။ အစုအသီးသီး၏ အစုဝင်အရေအတွက်ကို သရုပ်ပြပုံတွင်ဖော်ပြထားသည်။

(က) $n((B\cup C)')$ ကို ရှာပါ။

(ခ) $n(C) = n(A)$ ဖြစ်လျှင် k တန်ဖိုးကို ရှာပါ။



၈။ ပန်းချီနှင့်ကာတွန်းပြိုင်ပွဲ ကျင်းပရာ၌ ကျောင်းသားအယောက် 100 တွင် 63 ယောက်သည် ပန်းချီပြိုင်ပွဲတွင်လည်းကောင်း၊ 17 ယောက်သည် ပြိုင်ပွဲနှစ်ခုစလုံးတွင်လည်းကောင်း ဝင်ရောက်ယှဉ်ပြိုင်ကြပြီး ပြိုင်ပွဲနှစ်ခုစလုံးတွင် ဝင်ရောက်ယှဉ်ပြိုင်ခြင်းမရှိသော ကျောင်းသား 11 ယောက် ရှိသည်။

(က) ကာတွန်းပြိုင်ပွဲတွင် ဝင်ရောက်ယှဉ်ပြိုင်သည့်ကျောင်းသားမည်မျှရှိမည်နည်း။

(ခ) ပန်းချီပြိုင်ပွဲတွင် ဝင်ရောက်ယှဉ်ပြိုင်ပြီး ကာတွန်းပြိုင်ပွဲတွင် ဝင်ရောက်မယှဉ်ပြိုင်သည့် ကျောင်းသားမည်မျှရှိမည်နည်း။

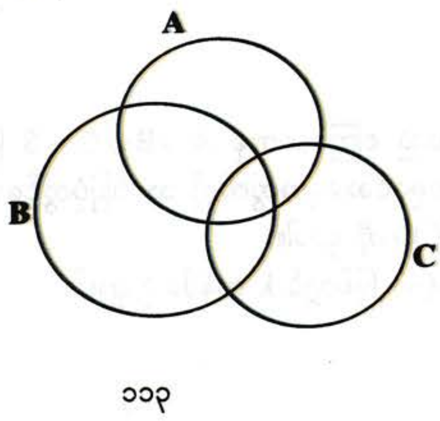
(ဂ) ကာတွန်းပြိုင်ပွဲတွင် ဝင်ရောက်မယှဉ်ပြိုင်သည့် ကျောင်းသားမည်မျှရှိမည်နည်း။

၉။ အောက်ဖော်ပြပါပုံသည် အစုသုံးစု A, B, C တို့၏ ဖြတ်ခြင်းကိုဖော်ပြသောပုံဖြစ်သည်။ ပေးထားသောပုံကို 5 ပုံ ကူးဆွဲ၍ တစ်ပုံချင်းစီ တွင်အောက်ပါနယ်ပယ်တစ်ခုစီကို ခြယ်မှုန်းပြပါ။

(က) $A \cup B$ (ခ) $A \cap (B \cup C)$

(ဂ) $(A \cap B)$ (ဃ) $(A \cap C)$

(င) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$



၈.၉ ဥပဒေသများ

၁။ **ဖက်စပ်ရဂုဏ်သတ္တိများ** (Associative Laws)

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

၂။ **ဖြန့်ဝေရဂုဏ်သတ္တိများ** (Distributive Laws)

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

၃။ **De Morgan's Laws**

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

၄။ $(A')' = A$

၅။ $A \setminus B = A \cap B'$

ဥပမာ ။ S သည် 9 အောက်ငယ်သောသဘာဝကိန်းများအစု ဖြစ်သည်။ $A = \{1, 2, 5, 6, 8\}$ နှင့် B သည်စုံကိန်းများအစုဖြစ်လျှင် အောက်ပါတို့မှန်ကြောင်းကို ချိန်ကိုက်ပြပါ။

(က) $A \setminus B = A \cap B'$ (ခ) $(A')' = A$

(ဂ) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ဃ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, A = \{1, 2, 5, 6, 8\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$

(က) $A \setminus B = \{1, 5\}$, $B' = S \setminus B = \{1, 3, 5, 7\}$

$A \cap B' = \{1, 5\}$

$\therefore A \setminus B = A \cap B'$

(ခ) $A' = S \setminus A = \{3, 4, 7\}$

$(A')' = S \setminus A' = \{1, 2, 5, 6, 8\} = A$

$\therefore (A')' = A$

(ဂ) $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8\}$

$(A \cup B)' = S \setminus (A \cup B) = \{3, 7\}$

$A' \cap B' = \{3, 7\}$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

(ဃ) $A \cap B = \{2, 6, 8\}$

$(A \cap B)' = S \setminus (A \cap B) = \{1, 3, 4, 5, 7\}$

$A' \cup B' = \{1, 3, 4, 5, 7\}$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

လေ့ကျင့်ခန်း ၈.၉

၁။ $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A =$ သုဒ္ဓကိန်းများပါသည့်အစု, $B =$ စုံကိန်းများအစု နှင့် $C =$ နှစ်ထပ်ကိန်းများအစု ဖြစ်လျှင် အောက်ပါတို့ကို မှန်ကြောင်းချိန်ကိုက်ပြပါ။

(က) $(A \cap B) \subset A$ (ခ) $B \setminus C \subset B \cap C'$ (ဂ) $A \setminus B \subset B'$

(ဃ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (င) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

၂။ $S = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A = \{x \mid x \in S, 2 \le x < 8\}$, $B = \{x \mid x$ သည်သုဒ္ဓကိန်း$\}$ နှင့် $C = \{2, 6, 10\}$ ဖြစ်လျှင် အောက်ပါတို့ကို မှန်ကြောင်းချိန်ကိုက်ပြပါ။

(က) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(ခ) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

၃။ $S = \{x \mid x \in N, 1 \le x \le 10\}$, $A = \{x \mid x - 1 \ge 3\}$ နှင့် $B = \{x \mid 8 < 4x < 30\}$ ဖြစ်လျှင် အောက်ပါတို့ကို မှန်ကြောင်းချိန်ကိုက်ပြပါ။

(က) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (ခ) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

၄။ $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, $A = \{x \mid x$ သည် 18 ၏ဆခွဲကိန်း$\}$ နှင့် $B = \{x \mid 3x - 1 > 20\}$ ဖြစ်လျှင် အောက်ပါတို့ကို မှန်ကြောင်းချိန်ကိုက်ပြပါ။

(က) De Morgan's Laws (ခ) $A \setminus B = A \cap B'$

၅။ အောက်ပါတို့ မှန်ကန်ကြောင်း ဖော်ပြသည့် Venn သရုပ်ပြပုံ တစ်ခုစီဆွဲပါ။

(က) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ခ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (ဂ) $A \setminus B = A \cap B'$

အခန်း ၉ ကိန်းအဆင်နှင့်ကိန်းစဉ်များ

၉.၁ စဉ်လိုက်ကိန်းများ

ဖော်ပြပါဆက်တိုက်အပြည့်ကိန်းများကို စတုရန်းကွက်စာရွက်တွင်ကူးယူပြီး မေးခွန်း (၁) မှ (၅) အထိ ဖြေကြည့်ပါ။ ထိုအခါ ကိန်းအဆင်များကို မြင်တွေ့လာမည်။

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

၁။ အောက်ဖော်ပြပါ အတန်း၊ အတိုင် အလိုက်ရှိနေသည့် ကိန်းအားလုံးကို ကြည့်လျှင် မည်သည့် အချက်တို့ကို သတိပြုမိမည်နည်း။

(က) တတိယတန်းရှိ ကိန်းအားလုံး (ခ) အဋ္ဌမတန်းရှိ ကိန်းအားလုံး

(ဂ) ဆဋ္ဌမတန်းရှိ ကိန်းအားလုံး (ဃ) ဒုတိယတိုင်ရှိ ကိန်းအားလုံး

(င) ဒသမတိုင်ရှိ ကိန်းအားလုံး

၂။ 55 နှင့် 99 တို့သည် မည်သည့်အတန်းနှင့် မည်သည့်အတိုင်တွင် ရှိသနည်း။

၃။ (က) အဓိကထောင့်ဖြတ်(main diagonal)မျဉ်းပေါ်ရှိ ကိန်းများ၏ ထူးခြားချက်ကိုဖော်ပြပါ။

(ခ) အခြားထောင့်ဖြတ်မျဉ်းပေါ်ရှိ ကိန်းများ၏ ထူးခြားချက်ကို ဖော်ပြပါ။

၄။ စုံကိန်းများအားလုံး မည်သည့်နေရာတွင် တည်ရှိသနည်း။

၅။ (က) 3 ၏ ဆတိုးကိန်းများကို အရောင်ခြယ်ပါ။

(ခ) 7 ၏ ဆတိုးကိန်းများကို အခြားအရောင်ဖြင့်ခြယ်ပါ။

(ဂ) အရောင်နှစ်ရောင်စလုံး ခြယ်ထားသော ကိန်းများသည် မည်သည့်ကိန်းမျိုး ဖြစ်သနည်း။

လေ့ကျင့်ခန်း ၉.၁

သင်ခန်းစာ ၉. ၁ မှ ဇယားကိုအသုံးပြု၍

၁။ အောက်ပါတို့ကို အရောင်ခြယ်ပါ။

(က) သုဒ္ဓကိန်းများ

(ခ) ကိန်းတစ်လုံးရှိ ဂဏန်းတို့ကို ပေါင်းလျှင် ပေါင်းလဒ် 5 ရသော ကိန်းများ

(ဂ) အခြားစိတ်ဝင်စားဖွယ်ရှိသော ကိန်းစုများ

၂။ (က) 5 ၏ ဆတိုးကိန်းများကို အရောင်ခြယ်ပါ။

(ခ) 9 ၏ ဆတိုးကိန်းများကို အခြားအရောင်ဖြင့်ခြယ်ပါ။

(ဂ) အရောင်နှစ်ရောင်စလုံး ခြယ်သောကိန်းများသည် မည်သည့်ကိန်းမျိုး ဖြစ်သနည်း။

၉.၂ ကိန်းတည်ဆောက်မှုပုံစံအမျိုးမျိုးနှင့်ကိန်းစဉ်အမျိုးမျိုး

အောက်ပါကိန်းအစုများကို သိရှိပြီးဖြစ်သည်။

အပြည့်ကိန်းများအစု $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

သဘာဝကိန်းများအစု $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

အပြည့် စုံကိန်းများအစု $\{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

အပေါင်း မကိန်းများအစု $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

သုဒ္ဓကိန်းများအစု $\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$

6 ၏ဆတိုးကိန်းများအစု $\{0, 6, 12, 18, \ldots\}$

ဤသို့ ဂုဏ်သတ္တိတစ်ခုခုကို လိုက်နာ၍ အစီအစဉ်အလိုက် ရေးသားထားသော ကိန်းများကို **ကိန်းစဉ်** (sequence) ဟုခေါ်သည်။ ၎င်းကိန်းစဉ်တွင် ပါဝင်သော ကိန်းများကို **ကိန်းလုံးများ**(terms) ဟုခေါ်သည်။

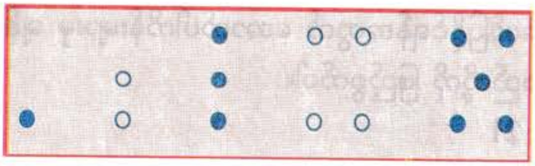
ဥပမာအားဖြင့်

(က) $0, 2, 4, 6, \ldots$

(ခ) $1, 10, 100, 1000, \ldots$

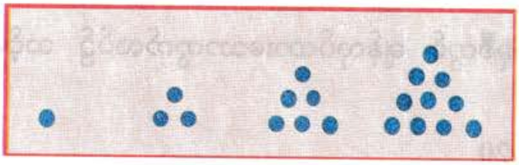
(ဂ) $50, 45, 40, 35, \ldots$ တို့သည် ကိန်းစဉ်များ ဖြစ်ကြသည်။

ကိန်းစဉ်များကို ပုံစံအမျိုးမျိုးဖြင့် သရုပ်ဖော်နိုင်သည်။



ပုံ ၉.၁

ပုံ ၉. ၁ သည် သဘာဝကိန်းများဖြစ်သော 1, 2, 3, 4, 5 တို့ကို သရုပ်ဖော်ထားသည်။



ပုံ ၉.၂

ပုံ ၉. ၂ သည် တြိဂံပုံဖော်ကိန်းများဖြစ်သော 1, 3, 6, 10 တို့ကို သရုပ်ဖော်ထားသည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၉.၂

၁။ (က) ပုံ ၉. ၁ ကို ကူးယူ၍ ကိန်းစဉ်အတွက် နောက်ထပ်ကိန်း 2 လုံးကို အစက်ပုံစံဖြင့်ဖြည့်စွက်ပါ။
(ခ) ထိုကိန်းစဉ်၏ ပထမကိန်း 6 လုံးကို ရေးပါ။

၂။ (က) ပုံ ၉. ၂ ကို ကူးယူ၍ ကိန်းစဉ်အတွက် နောက်ထပ်ကိန်း 2 လုံးကိုအစက်ပုံစံဖြင့်ဖြည့်စွက်ပါ။
(ခ) ထိုကိန်းစဉ်၏ ပထမကိန်း 6 လုံးကို ရေးပါ။

၃။ 1, 2, 3, 4 ၏နှစ်ထပ်ကိန်းများဖြစ်သော $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ တို့ကိုဖော်ပြသည့် ကိန်းစဉ်အတွက် အစက်ပုံစံဖြင့် ဆွဲပြပါ။

၄။ အောက်ပါကိန်းစဉ်တစ်ခုစီမှ ကိန်းနှစ်လုံးစီဖြည့်၍ ရေးပါ။

(က) 1, 3, 5, 7, — , —

(ခ) 2, 4, 8, 16, — , —

(ဂ) 4, 9, 16, 25, — , —

(ဃ) 1, 2, 1, 3, 1, 4, — , —

(င) 0, 5, 10, 15, — , —

(စ) $0 \times 3, 1 \times 4, 2 \times 5, 3 \times 6$, — , —

၅။ ဂုဏ်သတ္တိတစ်ခုခုကို ဖော်ပြနိုင်ရန်အတွက် အောက်ပါကိန်းများမှ ချန်လှပ်သင့်သည်တို့ကို ချန်၍ ဖြည့်စွက်သင့်သည်တို့ကို ဖြည့်စွက်ပါ။

(က) 1, 5, 9, 11, 17, 21

(ခ) 1, 4, 9, 16, 20, 25

(ဂ) 91, 84, 77, 71, 63

(ဃ) 1, 3, 6, 10, 15, 20

၆။ အောက်ပါကိန်းစဉ်တစ်ခုစီတွင် ချန်လှပ်ထားသောကွက်လပ်၌ သင့်လျော်သောကိန်းများ ဖြည့်စွက်ပါ။

(က) 4, —, 12, 16, 20

(ခ) 2, 1, 3, 2, 4, —, 5, 4

(ဂ) 16, 8, 4, 2, —

(ဃ) 99, 87, 75, —, 51

၇။ အောက်ပါ အဆင်အတိုင်းရှိသော ကိန်းစဉ်တို့မှ 5 ကြိမ်မြောက်ကိန်းလုံးနှင့် 8 ကြိမ်မြောက် ကိန်းလုံးတို့ကိုရှာပါ။

(က) 3, 5, 7, 9, . . .

(ခ) 2, 3, 5, 8, . . .

(ဂ) 3, 6, 12, 24, . . .

(ဃ) 1, 0.1, 0.01, 0.001, . . .

(င) 1, 4, 9, 16, . . .

(စ) 2 မှစသော သုဒ္ဓကိန်းများ

(ဆ) $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 5, \dots$

(ဇ) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

၉.၃ ကိန်းစဉ်ရှိကိန်းလုံး၏ နေရာစဉ်များ

အထက်တွင်လေ့လာခဲ့သည့် လေ့ကျင့်ခန်း ၉.၂ နံပါတ် ၇ တွင် ကိန်းလုံး 4 လုံးသာ ပေးထားသည့် ကိန်းစဉ်တို့၏ 5 ကြိမ်မြောက်နှင့် 8 ကြိမ်မြောက်ကိန်းလုံးတို့ကိုရှာနိုင်ကြောင်း တွေ့ခဲ့ကြသည်။ ဤသို့ဖြစ်ရခြင်းမှာ ကိန်းစဉ်တစ်ခုရှိ ကိန်းလုံးများ၏ နေရာအစီအစဉ်ကြောင့် ဖြစ်သည်။

ကိန်းစဉ်တစ်ခုတွင် ကိန်းလုံးများ၏ နေရာအစီအစဉ်သည် အရေးကြီးပေသည်။ သို့သော် အစုတစ်ခုတွင်မူ အစုတွင်ပါဝင်သည့်အစုဝင်များ၏ နေရာအစီအစဉ်သည် အရေးမကြီးပေ။ ဤအချက်သည် ကိန်းစဉ်နှင့်အစုတို့၏ ခြားနားချက်တစ်ခုပင်ဖြစ်သည်။

ဥပမာအားဖြင့် သဘာဝကိန်းများနှင့် အစဉ်လိုက်မကိန်းများကို အောက်ပါအတိုင်း တွဲလျက်ဖော်ပြနိုင်သည်။

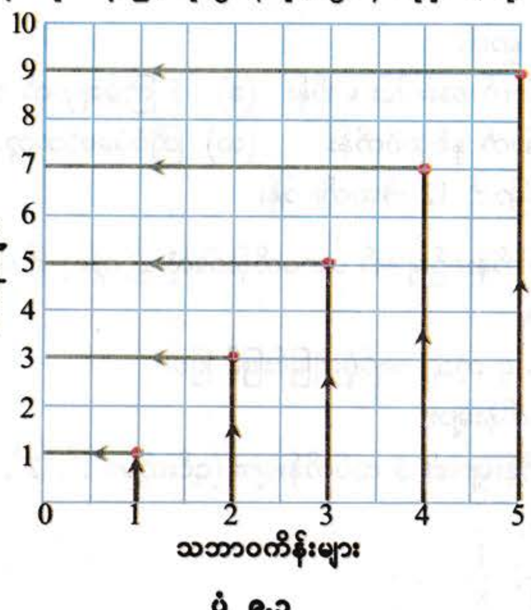
သဘာဝကိန်း	1	2	3	4	5	. . .
	↓	↓	↓	↓	↓	. . .
မကိန်းများ	1	3	5	7	9	. . .

၎င်းမှ တတိယ မကိန်းလုံးသည် 5 ဖြစ်၍ ပဉ္စမ မကိန်းလုံးသည် 9 ဖြစ်ကြောင်း တွေ့ရှိရပေမည်။

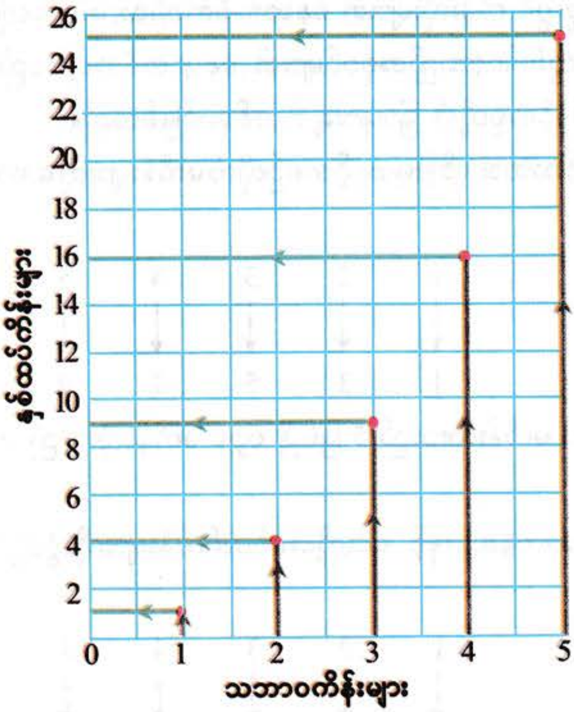
ထို့ပြင် သဘာဝကိန်းများနှင့် ၎င်းတို့၏နှစ်ထပ်ကိန်းများကိုတွဲလျက် အောက်ပါအတိုင်း ဖော်ပြနိုင်သည်။

သဘာဝကိန်း	1	2	3	4	5	. . .
	↓	↓	↓	↓	↓	. . .
နှစ်ထပ်ကိန်းများ	1	4	9	16	25	. . .

ဤဆက်သွယ်မှုများကို ဂရပ်ဖြင့် ပုံ ၉. ၃ နှင့် ၉. ၄ တို့မှာကဲ့သို့ ဖော်ပြနိုင်၏။



ပုံ ၉.၃



ပုံ ၉.၄

လေ့ကျင့်ခန်း ၉.၃

၁။ အောက်ပါတို့ကို ရှာပါ။

(က) 6 ကြိမ်မြောက် အပေါင်း မကိန်း (ခ) 5 ကြိမ်မြောက် အပြည့် စုံကိန်း

(ဂ) 7 ကြိမ်မြောက် နှစ်ထပ်ကိန်း (ဃ) တြိဂံပုံဖော်သတ္တမကိန်း

(င) 12 ကြိမ်မြောက် 12 ၏ဆတိုးကိန်း

၂။ အောက်ဖော်ပြပါကိန်းစဉ်များ၏ ပထမကိန်းငါးလုံးနှင့်တွဲလျက် ပထမသဘာဝကိန်း 5 ခုကို ယှဉ်တွဲဖော်ပြပါ။

တစ်ခုစီကို ပုံ ၉. ၄ ကဲ့သို့ ဂရပ်ပုံဆွဲခြင်းဖြင့် ပြပါ။

(က) အပြည့် စုံကိန်းများ

(ခ) သဘာဝကိန်းများ၏ 3 ထပ်ကိန်းများ (၎င်းတို့မှာ 1^3, 2^3, 3^3, ...)

(ဂ) 2, 3, 5, 8, ...

(ဃ) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

၃။ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... သည် တတိယကိန်းမှစ၍ ကိန်းအလုံးတိုင်းသည် ရှေ့ကိန်းနှစ်လုံး ပေါင်းလဒ်နှင့် တူညီသောကိန်းစဉ် ဖြစ်သည်။
ထိုကိန်းစဉ်ကို (Fibonacci) ဆိုသူ တီထွင်၍ Fibonacci ကိန်းစဉ်ဟုခေါ်သည်။
ဤသို့သောကိန်းစဉ်မျိုးတွင် ပထမကိန်းနှစ်လုံးအတွက် ကြိုက်ရာကိန်းရွေး၍ ပြုလုပ်နိုင်ပေသည်။
Fibonacci ကိန်းစဉ်အတိုင်း ကိန်း 5 လုံး ဆက်ရေးပါ။
(က) 1, 3, ... (ခ) 1, 4, ...

၉.၄ ကိန်းစဉ်တစ်ခု၏ ကိန်းအဆင်များ

အောက်ပါဥပမာများကို လေ့လာကြည့်ကြပါစို့။

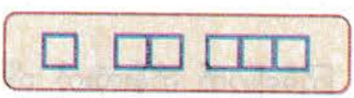
ဥပမာ ၁။ ကိန်းစဉ် 5, 8, 11, 14, ... တွင်နောက်ကိန်းသည် ၎င်း၏ရှေ့ကိန်းကို 3 ပေါင်းခြင်းဖြင့် ရရှိသည်။

ဥပမာ ၂။ 3, 1, $\frac{1}{3}$, ... ကိန်းစဉ်တွင်နောက်ကိန်းသည် ရှေ့ကိန်းကို $\frac{1}{3}$ နှင့် မြှောက်ခြင်းဖြင့် ရရှိသည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၉.၄

၁။ အောက်ပါကိန်းစဉ်တစ်ခုစီတွင် ဆက်တိုက်နောက်ကိန်းကို ရစေမည့် စည်းမျဉ်းဂုဏ်သတ္တိတစ်ခုကိုရှာပါ။
(က) 100, 96, 92, 88, ... (ခ) 3, 6, 12, 24, ...
(ဂ) 1, 3, 5, 7, ... (ဃ) 64, 32, 16, 8, ...
(င) 9.9, 8.8, 7.7, 6.6, ... (စ) 1, 10, 100, 1000, ...
(ဆ) 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, ... (ဇ) 2, 2^2, 2^3, 2^4, ...

၂။



ပုံ ၉.၅

ပုံ ၉.၅ တွင် တုတ်ချောင်းကလေးများကို ဆက်၍ ကိန်းစဉ်တစ်ခုကိုဖော်ပြထားသည်။

နောက်ထပ်ပုံနှစ်ခုကိုဖြည့်စွက်၍ အောက်ပါတို့အတွက် ကိန်းစဉ်များရေးပြီး နောက်ဆက်တွဲကိန်းနှစ်လုံးစီရှာပါ။

(က) ပုံရှိ စတုရန်းကွက်များ၏အရေအတွက်

(ခ) ပုံရှိ တုတ်ချောင်းကလေးများ၏အရေအတွက်

၃။

ပုံ ၉.၆

ပုံ ၉. ၆ သည် တုတ်ချောင်းကလေးများဖြင့် ပုံဖော်ထားသည်။ ၎င်းပုံကိုကူး၍ စတုတ္ထကိန်းပုံစံပါဝင်လာအောင် ဖြည့်စွက်ပါ။

(က) တြိဂံအရေအတွက်ပြသော ကိန်းစဉ်

(ခ) တုတ်ချောင်းအရေအတွက်ပြသော ကိန်းစဉ်

(ဂ) အနားပြိုင်စတုဂံအရေအတွက်ပြသော ကိန်းစဉ်

၉.၅ ကိန်းစဉ်တစ်ခုမှ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းလုံး

ကိန်းစဉ်တစ်ခုရှိ ကိန်းလုံးများက လိုက်နာလျက်ရှိသော ဥပဒေစည်းကမ်းတစ်ခုကို အက္ခရာသင်္ချာပုံသေနည်းအသွင်ဖြင့် ဖော်ပြလေ့ရှိသည်။

ဥပမာ ၁။

သဘာဝကိန်းများ	1	2	3	4 . . .	n . . .
	↓	↓	↓	↓ . . .	↓ . . .
အပြည့် စုံကိန်းများ	0	2	4	6 . . .	? . . .
	2×0	2×1	2×2	2×3	$2 \times (n-1)$

အထက်ပါဖော်ပြချက်အရ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းသည် $2 \times (n-1)$ ဖြစ်ကြောင်း တွေ့ရှိရသည်။ ထို့ကြောင့် အပြည့် စုံကိန်းများပါသော ကိန်းစဉ်၏ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းသည် $2(n-1)$ ဖြစ်သည်။

ကိန်းစဉ်၏ n ကြိမ်မြောက် ကိန်းလုံးကို သိခြင်းဖြင့် ထိုကိန်းစဉ်၏မည်သည့်အကြိမ်မြောက် ကိန်းလုံးကိုမဆို ရရှိနိုင်သည်။

ဥပမာ 100 ကြိမ်မြောက် အပြည့် စုံကိန်းသည် $2\times(100-1) = 2 \times 99 = 198$ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၂။ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းသည် $\frac{1}{2}n(n+1)$ ဟုပေးထားသော ကိန်းစဉ်မှ ပထမကိန်း 4 လုံးကို ရေးပါ။

ပထမကိန်းကိုရှာရန် n နေရာ၌ 1 အစားသွင်းသဖြင့် $\frac{1}{2}\times 1\times 2 = 1$ ရသည်။

ဒုတိယကိန်းကိုရှာရန် n နေရာ၌ 2 အစားသွင်းသဖြင့် $\frac{1}{2}\times 2\times 3 = 3$ ရသည်။

တတိယကိန်း $= \frac{1}{2}\times 3\times 4 = 6$

စတုတ္ထကိန်း $= \frac{1}{2}\times 4\times 5 = 10$

ကိန်းစဉ်မှာ 1, 3, 6, 10, . . .

လေ့ကျင့်ခန်း ၉.၅

၁။ (က) ကိန်းစဉ် 1, 2, 3, 4, . . . မှ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းကို ရှာပါ။ ၎င်းမှတစ်ဆင့် ကိန်းစဉ် 2, 3, 4, 5, . . . ၏ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းကို ရေးပါ။ ထို့အတူ ကိန်းစဉ် 5, 6, 7, 8, . . . နှင့် 11, 12, 13, 14 , . . . တို့၏ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းကို ရှာပါ။

(ခ) ကိန်းစဉ် 3, 6, 9, 12, . . . မှ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းကို ရှာပါ။ ၎င်းမှတစ်ဆင့် ကိန်းစဉ် 4, 7, 10, 13, . . . ၏ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းကို ရှာပါ။ ထို့အတူ ကိန်းစဉ် 8, 11, 14, 17, . . . နှင့် 12, 15, 18, 21 , . . . တို့၏ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းတို့ကိုရေးပါ။

(ဂ) (က) နှင့် (ခ) ကို အခြေပြု၍ အောက်ပါကိန်းစဉ်တို့၏ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းကို ရှာပါ။

(1) 6, 11, 16, 21, . . . (2) 3, 7, 11, 15, . . . (3) 0, 6, 12, 18, . . .

၂။ အောက်ပါကိန်းစဉ်တို့မှ n ကြိမ်မြောက်ကိန်း၏ ပုံသေနည်းကို ရေးပါ။

(က) 1, 2, 3, 4, . . . (ခ) 1, 4, 9, 16, ...

(ဂ) $1\times 2, 2\times 3, 3\times 4, \dots$ (ဃ) 1, 8, 27, 64, ...

(င) 3, 9, 27, 81, . . . (စ) 5, 9, 13, 17, ...

(ဆ) $1\times2\times3, 2\times3\times4, 3\times4\times5, \dots$ (ဇ) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

၃။ အောက်ပါတို့သည် n ကြိမ်မြောက်ကိန်းလုံးများဖြစ်လျှင် ပထမကိန်း 4 လုံးကို ရှာပါ။

(က) $3n+2$ (ခ) 5×2^n (ဂ) $195-6n$ (ဃ) $n(n+1)$

(င) 2^n+1 (စ) $2n-1$ (ဆ) $(n-1)(2n+1)$ (ဇ) $\frac{1}{2}n(n-1)$

၄။ T_n သည်ကိန်းစဉ်တစ်ခု၏ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းလုံးဖြစ်လျှင် ဇယားတွင် ဖော်ပြထားသော အကြိမ်မြောက်ကိန်းလုံးများကိုရှာပါ။

T_n	$n + 3$	n^4	3^n	$n(n + 1)$	$4n - 1$	$n (n + 1)(n + 2)$
ရှာရန်	T_7	T_5	T_4	T_{100}	T_6	T_{12}

လေ့ကျင့်ခန်း ၉.၆

အထွေထွေမေးခွန်းများ

၁။ ကိန်းစဉ်အသီးသီးမှ n ကြိမ်မြောက်ကိန်း၏ ပုံသေနည်းကို ရေးပါ။

(က) 5, 10, 15, 20, . . . (ခ) 2, 4, 8, 16, . . .

(ဂ) 3, 4, 5, 6, . . . (ဃ) 0, 1, 2, 3, . . .

(င) 2, 5, 8, 11, . . . (စ) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

၂။ အောက်ပါတို့သည်ကိန်းစဉ်အသီးသီး၏ n ကြိမ်မြောက်ကိန်းပုံသေနည်းများဖြစ်လျှင် ပထမကိန်းနှင့် 10 ကြိမ်မြောက်ကိန်းများကို ရှာပါ။

(က) $n + 5$ (ခ) $2n - 1$ (ဂ) n^3

(ဃ) $(n + 1)^2$ (င) $n (n - 1)$ (စ) $100 - 10n$

၃။ ကျောင်းခန်းမတစ်ခုတွင် ခုံများစီထားရာ ပထမအတန်းရှိ ခုံအရေအတွက်သည် 20 ဖြစ်၏။ အတန်းတစ်တန်းစီရှိ ခုံအရေအတွက်သည် ကပ်လျက် ရှေ့တန်းခုံအရေအတွက်ထက် 2 ခုံ ပို၏။ ခန်းမတွင် ခုံတန်းပေါင်း 10 တန်းရှိလျှင် ခန်းမရှိ ခုံအရေအတွက်ကိုရှာပါ။

အခန်း ၁၀ ကိန်းရေးနည်းစနစ်

ယခုသင်ခန်းစာတွင် **ဆယ်လီစနစ်** (decimal system)နှင့် **နှစ်လီစနစ်** (binary system) စသည့် ကိန်းရေးနည်းစနစ်များကို လေ့လာကြရမည်။ ဤသင်ခန်းစာကို သင်ကြားပြီးပါက ကွန်ပျူတာနည်းပညာလေ့လာရာတွင် အရေးပါသည့် နှစ်လီစနစ်ကို သိရှိနားလည်မည် ဖြစ်သည်။ ထို့ပြင် ဆယ်လီစနစ်နှင့် နှစ်လီစနစ်တို့၏ အပြန်အလှန် ဆက်သွယ်ရေးနည်းစနစ်များကိုလည်း သိရှိနားလည်မည်ဖြစ်သည်။

ကိန်းများရေတွက်ရာတွင် ဆယ်လီစနစ်ကို အများဆုံး အသုံးပြုခဲ့ကြသည်။ ဆယ်လီစနစ်တွင် 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ဟူသော သင်္ကေတ 10 ခုဖြင့် ကိန်းများကိုဖော်ပြခဲ့ကြသည်။ ယင်းစနစ်တွင် ကိန်းတစ်ခု၏တန်ဖိုးကို ခုဂဏန်း (units digit – 10^0)၊ ဆယ်ဂဏန်း (tens digit – 10^1)၊ ရာဂဏန်း (hundreds digit 10^2)၊ ထောင်ဂဏန်း (thousands digit – 10^3) စသည်တို့ကို သုံး၍ဖော်ပြခဲ့ကြသည်။

ဥပမာအားဖြင့် 4309 ကို အောက်ပါကဲ့သို့ ဖော်ပြနိုင်သည်။

ထောင် thousands -10^3	ရာ hundreds -10^2	ဆယ် tens -10^1	ခု units - 10^0
$4000 = 4 \times 10^3$	$300 = 3 \times 10^2$	$0 = 0 \times 10^1$	$9 = 9 \times 10^0$
4	3	0	9

ဤတွင် ဆယ်လီစနစ်၏ **အခြေ** (base) 10 ဖြစ်သည်။
ဆယ်လီစနစ်ကဲ့သို့ အခြားသောကိန်းရေးနည်းစနစ်များကို ဆက်လက်လေ့လာကြမည်။

၁၀.၁ နှစ်လီစနစ်(Binary System)

နှစ်လီစနစ်တွင် ကိန်းများကို ဖော်ပြရာ၌ 0 နှင့် 1 ဟူသော သင်္ကေတနှစ်ခုကိုသာ အသုံးပြုရသည်။ ဥပမာအားဖြင့် ဆယ်လီစနစ်မှ 2 ကို နှစ်လီစနစ်တွင် 1 0 ဟု ဖော်ပြသည်။ ဆယ်လီစနစ်နှင့် နှစ်လီစနစ်တွင်ရှိသော ကိန်းများကို အောက်ပါအတိုင်း ရေးသားသည်။

ဆယ်လီစနစ်	နှစ်လီစနစ်
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101

နှစ်လီစနစ်တွင် ကိန်း၏တန်ဖိုးကို ဖော်ပြရာ၌ 1 (units) ကို 2^0၊ 2 (two) ကို 2^1၊ 4 (four) ကို 2^2 စသည်တို့ကို သုံး၍ဖော်ပြသည်။ ဥပမာအားဖြင့် နှစ်လီစနစ်ရှိ ကိန်း 101011 ကို အောက်ပါဇယားဖြင့် ဖော်ပြနိုင်သည်။

thirty-two 2^5	sixteen 2^4	eight 2^3	four 2^2	two 2^1	units 2^0
1×2^5	0×2^4	1×2^3	0×2^2	1×2^1	1×2^0
1	0	1	0	1	1

ဤတွင် နှစ်လီစနစ်၏ အခြေသည် 2 ဖြစ်သည်။

ဥပမာ။ နှစ်လီစနစ်ရှိ ကိန်း 1011_{two} နှင့် ကိန်း 1011001_{two} တို့ကို ဆယ်လီစနစ်သို့ အောက်ပါအတိုင်း ပြောင်းနိုင်သည်။

$$\begin{aligned}
1011_{two} &= 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
&= 8 + 0 + 2 + 1 \\
&= 11_{ten} \\
1011001_{two} &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
&= 64 + 0 + 16 + 8 + 0 + 0 + 1 \\
&= 89_{ten}
\end{aligned}$$

ကိန်းရေတွက်နည်းစနစ်ကို ခွဲခြားနိုင်ရန် သက်ဆိုင်ရာစနစ်ရှိ ကိန်းများ၏အခြေကို စာဖြင့် ဖော်ပြထားသည်။

၁၀.၂ ကွန်ပျူတာများနှင့်နှစ်လီစနစ်(Computers and the Binary System)

နှစ်လီစနစ်တွင် 0 နှင့် 1 သင်္ကေတနှစ်ခုကိုသာ အသုံးပြုရသည်ဟူသောအချက်သည် ကွန်ပျူတာနှင့် ဆက်သွယ်ရာတွင် အရေးကြီးသောအချက်ဖြစ်သည်။ ကွန်ပျူတာသည် **နှစ်လီဆကိန်းအသွင်** (binary form) ဖြင့် ရေးသားထားသော ညွှန်ကြားချက်များကိုသာ လက်ခံနိုင်သည်။ အကြောင်းမှာ ကွန်ပျူတာနည်းပညာများတွင် မှန် မှား၊ ဟုတ် မဟုတ်၊ ရှိ မရှိ ကဲ့သို့သော အခြေအနေနှစ်ရပ် အကျုံးဝင်သည့် တုံ့ပြန်ချက်များကိုသာ အခြေခံထားသောကြောင့် ဖြစ်သည်။

၁၀.၃ အခြေနှစ်နှင့်အခြေတစ်ဆယ်ရှိသောကိန်းများ (Base-Two and Base-Ten Numbers)

အခြေ 2 နှင့် အခြေ 10 ရှိသော ကိန်းများကို အောက်ပါဥပမာများဖြင့် ဆက်လက်လေ့လာသွားမည်။

ဥပမာ ၁။ နှစ်လီစနစ်ရှိသော ကိန်း 101101 ကို ဆယ်လီစနစ်သို့ ပြောင်းပါ။

$$\begin{array}{cccccccl} 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & = & 32+0+8+4+0+1=45 \end{array}$$

$$101101_{two} = 45_{ten}$$

ဥပမာ ၂။ ဆယ်လီစနစ်ရှိသော ကိန်း 47 ကို နှစ်လီစနစ်သို့ ပြောင်းပါ။

(က) ပထမနည်း

47 အောက်ငယ်သော 2 ၏ ထပ်ကိန်းအကြီးဆုံးတန်ဖိုးသည် 32 ဖြစ်သည်။

$47 = 32 + 15$

15 အောက်ငယ်သော 2 ၏ ထပ်ကိန်းအကြီးဆုံးတန်ဖိုးသည် 8 ဖြစ်သည်။

$47 = 32 + 8 + 7$

7 အောက်ငယ်သော 2 ၏ ထပ်ကိန်းအကြီးဆုံးတန်ဖိုးသည် 4 ဖြစ်သည်။

$47 = 32 + 8 + 4 + 3$

3 အောက်ငယ်သော 2 ၏ ထပ်ကိန်းအကြီးဆုံးတန်ဖိုးသည် 2 ဖြစ်သည်။

$47 = 32 + 8 + 4 + 2 + 1$

ထို့ကြောင့်

$$\begin{array}{cccccccc} & & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \\ 47 & = & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$ ဖြစ်သည်။

$$\therefore 47_{ten} = 101111_{two}$$

(ခ) ဒုတိယနည်း

ပေးထားသော ဆယ်လီစနစ် ကိန်း 47 ကို 2 ဖြင့်စားပြီး တစ်ဆင့်ချင်းမှ ရရှိလာသောအကြွင်းများကို ကြည့်၍ နှစ်လီစနစ် ကိန်းသို့ ပြောင်းရေးနိုင်သည်။

		အကြွင်း
2	47	
2	23	1
2	11	1
2	5	1
2	2	1
2	1	0
	0	1

$$\therefore 47_{ten} = 101111_{two}$$

၁၀.၄ နှစ်လီစနစ်ရှိပေါင်းခြင်း၊မြှောက်ခြင်းဇယား

နှစ်လီစနစ်ရှိ ပေါင်းခြင်း၊ မြှောက်ခြင်းအတွက် အောက်ပါဇယားများကို အသုံးပြုရန်လိုသည်။

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

ဥပမာ ၁။ 1 + 1 ကို ဆယ်လီစနစ်နှင့် နှစ်လီစနစ်တို့တွင် တွက်ပါ။

ဆယ်လီစနစ်

$$\begin{array}{r} 1 \\ +\,1 \\ \hline 2 \end{array}$$

ဆယ်လီစနစ်မှ 2 ကို နှစ်လီစနစ်သို့ ပြောင်းသော် 10 ရမည်။ ထို့ကြောင့် နှစ်လီစနစ်တွင်

$$\begin{array}{r} 1 \\ +1 \\ \hline 10 \end{array}$$

ရသည်။

ဥပမာ ၂။ $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ကို နှစ်လီစနစ်တွင် တွက်ပါ။

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ +1 \\ \hline 101 \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}\right\} \;\; 10 \\ \left.\begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}\right\} \;\; 10 \\ 1 \quad\;\; \underline{+\,1} \\ \qquad\;\; 101 \end{array}}$$

ထို့ကြောင့် $1_{two} + 1_{two} + 1_{two} + 1_{two} + 1_{two} = 101_{two}$ ရသည်။

ဥပမာ ၃။ $21 - 10$ ကို ဆယ်လီစနစ်နှင့် နှစ်လီစနစ်တွင် တွက်ပြီး နှစ်လီစနစ်မှ ရရှိလာသော နတ်လဒ်ကို ဆယ်လီစနစ်သို့ ပြောင်းခြင်းဖြင့် ချိန်ကိုက်ပါ။

ဆယ်လီစနစ်

$$\begin{array}{r} 21 \\ -\ 10 \\ \hline 11 \end{array}$$

$21_{ten} = 10101_{two}$

$10_{ten} = 1010_{two}$

နှစ်လီစနစ်

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,0\,1 \\ -\ \ 1\,0\,1\,0 \\ \hline 1\,0\,1\,1 \end{array}$$

0	10	0	10	
$\cancel{1}$	0	$\cancel{1}$	0	1
–	1	0	1	0
	1	0	1	1

$1011_{two} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 0 + 2 + 1 = 11_{ten}$

ထို့ကြောင့် နှစ်လီစနစ်မှ ရရှိသောအဖြေ 1011_{two} ကို ဆယ်လီစနစ်သို့ ပြောင်းပါက 11_{ten} ပင် ဖြစ်သည်။

မှတ်ချက်။ နှစ်လီစနစ်ကိန်းများ၏ နုတ်ခြင်းကို စဉ်းစားရာတွင် ဆယ်လီစနစ်ကိန်းများ၏ နုတ်ခြင်းအတိုင်းပင် ဖြစ်သည်။ တည်ကိန်း 0 မှ နုတ်ကိန်း 1 ကို မနုတ်နိုင်သည့်အခါ 10_{two} (2_{ten}) ယူပြီး နုတ်ရသည်။ နုတ်လဒ်သည် 1 ရသည်။

ဂ ၄။ အောက်ပါ ဆယ်လီစနစ်ကိန်းများကို နှစ်လီစနစ်သို့ပြောင်းပြီး နုတ်ပါ။ ရရှိလာသည့် နုတ်လဒ်ကို ဆယ်လီစနစ်သို့ ပြောင်းပါ။

(က) $15 - 7$ (ခ) $16 - 7$

(က) $15_{ten} = 1111_{two}$

$7_{ten} = 111_{two}$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ -\ 111 \\ \hline 1000 \end{array}$$

$$1000_{two} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 8_{ten}$$

(ခ) $16_{ten} = 10000_{two}$

$7_{ten} = 111_{two}$

$$\begin{array}{r} 10000 \\ -\ 111 \\ \hline 1001 \end{array}$$

	1	1	1	
0	$\cancel{10}$	$\cancel{10}$	$\cancel{10}$	10
1	0	0	0	0
–		1	1	1
	1	0	0	1

$$1001_{two} = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 9_{ten}$$

ဥပမာ ၅။ 7×7 ကို နှစ်လီစနစ်သို့ ပြောင်းပြီး တွက်ပါ။ ရလဒ်ကို ဆယ်လီစနစ်သို့ ပြောင်းပါ။

$7_{ten} = 111_{two}$

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times\ 111 \\ \hline 111 \\ 1110 \\ +\ 11100 \\ \hline 110001 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
110001_{\text{two}} &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
&= 32 + 16 + 1 \\
&= 49_{\text{ten}}
\end{aligned}
$$

ဥပမာ ၆။ အောက်ပါတို့ကို နှစ်လီစနစ်တွင် တွက်ပါ။ ယင်းနှစ်လီစနစ်ကိန်းတို့ကို ဆယ်လီစနစ်တွင် ချိန်ကိုက်ပါ။

(က) $110011 \div 11$　　　　(ခ) $10011 \div 11$

(က)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 010001 \\
\hline
11 & 110011 \\
 & 0 \\
\hline
 & 11 \\
 & 11 \\
\hline
 & \;\,00 \\
 & \;\;\;0 \\
\hline
 & \;\;\;00 \\
 & \;\;\;\;0 \\
\hline
 & \;\;\;\;01 \\
 & \;\;\;\;\;0 \\
\hline
 & \;\;\;\;\;11 \\
 & \;\;\;\;\;11 \\
\hline
 & \;\;\;\;\;\;0
\end{array}
$$

ထို့ကြောင့်

$$
\begin{aligned}
\text{တည်ကိန်း}\quad 110011_{\text{two}} &= 51_{\text{ten}} \\
\text{စားကိန်း}\quad 11_{\text{two}} &= 3_{\text{ten}} \\
\text{စားလဒ်}\quad 10001_{\text{two}} &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
&= 16 + 1 \\
&= 17_{\text{ten}}
\end{aligned}
$$
ဖြစ်သည်။

ဆယ်လီစနစ်တွင် $51 \div 3 = 17$ ရသောကြောင့် နှစ်လီစနစ်တွင် ရသည့် စားလဒ်နှင့် တူညီသည်။

```
              0 0 1 1 0
(ခ)   11  |   1 0 0 1 1
              0
              1 0
              0
              1 0 0
                1 1
                  1 1
                  1 1
                    0 1
                      0
                      1        (အကြွင်း)
```

ထို့ကြောင့်

တည်ကိန်း $10011_{two} = 19_{ten}$

စားကိန်း $11_{two} = 3_{ten}$

စားလဒ် $110_{two} = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

$= 4 + 2$

$= 6_{ten}$ နှင့်

အကြွင်းသည် 1_{two} ဖြစ်သည်။

ဆယ်လီစနစ်တွင် 19 ကို 3 စားသောအခါ စားလဒ်သည် 6 ၊ အကြွင်းသည် 1 ရသောကြောင့် နှစ်လီစနစ်တွင်ရသည့် စားလဒ်၊ အကြွင်းတို့နှင့် တူညီသည်။

ဥပမာ ၇။ နှစ်လီစနစ်တွင် အောက်ပါတို့ကို တွက်ပါ။

(က) $111 + 11$ (ခ) $1101 + 110$ (ဂ) $101 - 11$ (ဃ) $10101 - 1110$

(င) 111×11 (စ) 101×111 (ဆ) $110 \div 10$ (ဇ) $100000 \div 101$

(က) $\begin{array}{r} 111 \\ +11 \\ \hline 1010 \end{array}$ (ခ) $\begin{array}{r} 1101 \\ +110 \\ \hline 10011 \end{array}$ (ဂ) $\begin{array}{r} 101 \\ -11 \\ \hline 10 \end{array}$

(ဃ) $$\begin{array}{r} 10101 \\ -\ 1110 \\ \hline 111 \end{array}$$

(င) $$\begin{array}{r} 111 \\ \times\ 11 \\ \hline 111 \\ +1110 \\ \hline 10101 \end{array}$$

(စ) $$\begin{array}{r} 101 \\ \times\ 111 \\ \hline 101 \\ 1010 \\ +10100 \\ \hline 100011 \end{array}$$

(ဆ) $110 \div 10$

$$\begin{array}{r|l} & \ \ 11 \\ \cline{2-2} 10 & 110 \\ & \underline{10} \\ & \ \ 10 \\ & \ \ \underline{10} \\ & \ \ \ 0 \end{array}$$

(ဇ) $100000 \div 101$

$$\begin{array}{r|l} & \ \ \ 110 \\ \cline{2-2} 101 & 100000 \\ & \underline{101} \\ & \ \ 110 \\ & \ \ \underline{101} \\ & \ \ \ \ 10 \\ & \ \ \ \ \ \underline{0} \\ & \ \ \ \ 10 \ \text{(အကြွင်း)} \end{array}$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၁၀.၁

(သီးခြားဖော်ပြခြင်းမပြုလျှင် ကိန်းများအားလုံးသည် နှစ်လီစနစ်ဖြင့် ဖော်ပြသည်ဟု ယူဆပါ။)

၁။ ပထမသဘာဝကိန်း 10 လုံးကို နှစ်လီစနစ်ဖြင့် ရေးပြပါ။

၂။ အောက်ပါနှစ်လီစနစ်ကိန်းများကို ဆယ်လီစနစ်သို့ ပြောင်းပါ။

(က) 1101 (ခ) 100110 (ဂ) 110101

(ဃ) 1100001 (င) 100001 (စ) 110001110

၃။ အောက်ပါ ဆယ်လီစနစ်ကိန်းများကို နှစ်လီစနစ်သို့ ပြောင်းပါ။

(က) 48_{ten} (ခ) 73_{ten} (ဂ) 101_{ten}

(ဃ) 127_{ten} (င) 100_{ten} (စ) 230_{ten}

၄။ နှစ်လီစနစ်တွင် ဂဏန်းသုံးလုံးပါသော အငယ်ဆုံးကိန်းနှင့် အကြီးဆုံးကိန်းတို့ကို ရှာပါ။ ထိုကိန်းများကို အခြေတစ်ဆယ်သို့ ပြောင်းပါ။

၅။ အောက်ပါတို့ကို ရှင်းပါ။

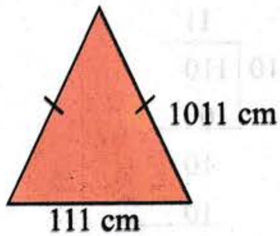
(က) 11111 + 10100 (ခ) 10100 + 1010 (ဂ) 1010 + 1011
(ဃ) 10101 + 11110 (င) 10111 − 10011 (စ) 10111 − 1000
(ဆ) 11111 − 1001 (ဇ) 11000 − 1111

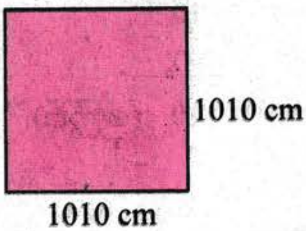
၆။ အောက်ပါတို့ကို ရှင်းပါ။

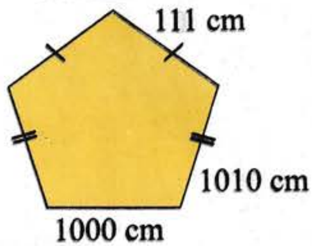
(က) x + 111 = 11110 (ခ) x + 11110 = 10001
(ဂ) x − 10 = 101 (ဃ) x − 11 = 1101

၇။ ပေးထားသောပုံတို့၏ ပတ်လည်အနားများကို ရှာပါ။

(က)


(ခ)


(ဂ)


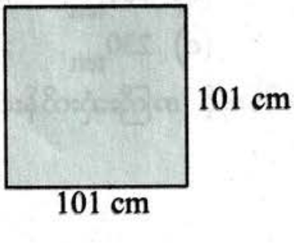
(ဃ)


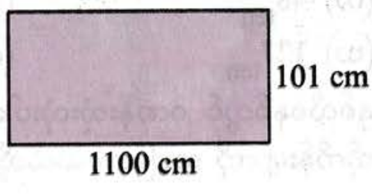
၈။ အောက်ပါတို့ကို ရှင်းပါ။

(က) 1100 × 10 (ခ) 11111 × 10 (ဂ) 101101 × 111
(ဃ) 10011 × 101 (င) 101110 ÷ 100 (စ) 100110 ÷ 101
(ဆ) 10100 ÷ 10 (ဇ) 11011 ÷ 111

၉။ မေးခွန်း ၈ မှ နှစ်လီစနစ်ကိန်းများကို ဆယ်လီစနစ်ကိန်းများသို့ ပြောင်း၍ တွက်ပြီး အဖြေများကိုချိန်ကိုက်ပါ။

၁၀။ အောက်ပါတို့၏ ဧရိယာကို ရှာပါ။

(က)


(ခ)


၁၁။ အောက်ပါတို့ကို ရှင်းပါ။

(က) $(1111 + 110) \times 111$ (ခ) $10011 + (110 \times 101)$

၁၂။ အောက်ပါတို့ကို အမှား အမှန် ဖြေပါ။

(က) $10101 > 11010$ (ခ) $10^{10} = 100$ (ဂ) $100^{10} = 1000$

(ဃ) $(110 \times 1010) \div 100 = 1111$

(င) 1010101 သည် မကိန်းဖြစ်သည်။

၁၃။ (က) 615_{ten} မှ 123_{ten} ကို ဆက်၍ ဆက်၍နုတ်ပါ။ ထိုမှဆက်၍ $615_{ten} \div 123_{ten}$ တန်ဖိုး ကို ရှာပါ။

(ခ) ဆင့်ကဲဆင့်ကဲ နုတ်ခြင်းဖြင့် $10010_{two} \div 110_{two}$ တန်ဖိုးကို ရှာပါ။ အဖြေကို စားခြင်းဖြင့် ချိန်ကိုက်ပါ။

၁၄။ နှစ်လီစနစ်ရှိ ကိန်းတစ်ခုသည်

(က) စုံကိန်းတစ်ခုကိုလည်းကောင်း

(ခ) 4 ဖြင့်စား၍ပြတ်သော ကိန်းတစ်ခုကိုလည်းကောင်း

ကိုယ်စားပြုနေသည်ဟူ၍ မည်သည့်အခြေအနေမျိုးတွင် သင်ပြောနိုင်သနည်း။

အခန်း ၁၁ စာရင်းအင်းသင်္ချာ

ဇဟိုပြုတိုင်းတာချက်များဖြစ်ကြသည့် ကြိမ်များကိန်း၊ သမတ်ကိန်း၊ အလယ်ကိန်းနှင့် လေးစိတ်ပိုင်းကိန်းတို့ အကြောင်းကို သိရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။ ယခုသင်ခန်းစာတွင် ထပ်ကြိမ်ပြဇယားမှ သမတ်ကိန်းရှာခြင်းကို လေ့လာကြမည်။ ထို့ပြင် **ယူဆသမတ်ကိန်း** (assumed mean) အသုံးပြု၍ သမတ်ကိန်းရှာခြင်းကိုလည်း လေ့လာမည်။

ဤသင်ခန်းစာကို သင်ကြားပြီးသောအခါ ထပ်ကြိမ်ပြဇယားဖြင့်ဖော်ပြထားသော ဖြန့်ချက်တစ်ခု၏သမတ်ကိန်းကို **ယူဆသမတ်ကိန်း**အသုံးပြု၍ ရှာတတ်မည်။

၁၁.၁ ထပ်ကြိမ်ပြဇယားမှသမတ်ကိန်းရှာခြင်း

ထပ်ကြိမ်ပြဇယားဖြင့်ဖော်ပြထားသောဖြန့်ချက်တစ်ခု၏ သမတ်ကိန်းကိုရှာရန် စုစုပေါင်း အရေအတွက်ကို ထပ်ကြိမ်ပေါင်းဖြင့်စားရသည်။

အောက်ပါ **ထပ်ကြိမ်ဖြန့်ချက်** (frequency distribution) တစ်ခုကို စဉ်းစားပါ။

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ တို့သည် ထပ်ကြိမ်များအလိုက်စုစည်းထားသော အချက်အလက်များ ဖြစ်ကြပြီး $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ တို့သည် သက်ဆိုင်ရာထပ်ကြိမ်များဖြစ်ကြလျှင် ယင်းတို့၏သမတ်ကိန်း ကို အောက်ပါအတိုင်းရှာနိုင်သည်။

$$\text{သမတ်ကိန်း } \mu = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \dots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

ဥပမာ ၁။ အားကစားကွင်းတစ်ခုတွင် လာရောက်ကစားခဲ့သော ပွဲစဉ် 22 ခု၏ ရရှိသော ဂိုးအရေအတွက်များကို စစ်တမ်းကောက်ယူကြည့်ရာ အောက်ပါအတိုင်းရရှိသည်။ ထိုထပ်ကြိမ်ပြဇယားမှ သမတ်ကိန်းကို ရှာမည်ဆိုပါစို့။

ဂိုးအရေအတွက်	0	1	2	3	4
ထပ်ကြိမ်	6	7	5	3	1

ရှေးဦးစွာ စုစုပေါင်းဂိုးအရေအတွက်ကိုရှာနိုင်ရန် ထပ်ကြိမ်ပြဇယားကို တစ်ဖက်ပါအတိုင်း ပြန်လည်ရေးသားပါ။ ဇယား၏တတိယတိုင်သည် ဂိုးအရေအတွက်နှင့် သက်ဆိုင်ရာ ထပ်ကြိမ်တို့၏ မြှောက်လဒ်ဖြစ်သည်။

ဂိုးအရေအတွက် (x)	ထပ်ကြိမ် (f)	fx
0	6	0
1	7	7
2	5	10
3	3	9
4	1	4
စုစုပေါင်း	22	30

အထက်ပါဇယားမှ

စုစုပေါင်းဂိုးအရေအတွက် $\sum fx = 30$

ထပ်ကြိမ်စုစုပေါင်း $\sum f = 22$

သမတ်ကိန်း $\mu = \dfrac{\sum fx}{\sum f} = \dfrac{30}{22} = 1.4$

ဥပမာ ၂။ အောက်ပါထပ်ကြိမ်ပြဇယားမှ သမတ်ကိန်းကို ရှာပါ။

ရမှတ်များ	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
ထပ်ကြိမ်	5	15	13	10	2

တန်းတူကြားပိုင်းများဖြင့်ဖော်ပြထားသော ထပ်ကြိမ်ပြဇယားတစ်ခုမှ သမတ်ကိန်းကို ရှာရန်အတွက် တန်းတူကြားပိုင်းအသီးသီး၏အလယ်မှတ်များကို ဦးစွာရှာရမည်။

ဥပမာအားဖြင့် 25-29 ကြားပိုင်း၏အလယ်မှတ်သည် $\dfrac{25+29}{2} = 27$ ဖြစ်ပြီး

35-39 ကြားပိုင်း၏အလယ်မှတ်သည် $\dfrac{35+39}{2} = 37$ ဖြစ်သည်။

ဇယား၏စတုတ္ထတိုင်သည် ကြားပိုင်းများ၏အလယ်မှတ်များ (x) နှင့် သက်ဆိုင်ရာ ထပ်ကြိမ် (f) တို့၏ မြှောက်လဒ်များဖြစ်ကြသည်။

ရမှတ်များ	အလယ်မှတ် (x)	ထပ်ကြိမ် (f)	fx
25-29	27	5	135
30-34	32	15	480
35-39	37	13	481
40-44	42	10	420
45-49	47	2	94
စုစုပေါင်း		$\sum f = 45$	$\sum fx = 1610$

$$\text{သမတ်ကိန်း } \mu = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1610}{45} = 35.78$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၁၁.၁

၁။ အောက်ပါထပ်ကြိမ်ပြဇယားများမှ သမတ်ကိန်းကို ရှာပါ။

(က) မိသားစုအလိုက် ကလေးအရေအတွက်ကိုဖော်ပြသော ထပ်ကြိမ်ပြဇယား

ကလေးအရေအတွက်	0	1	2	3	4	5
ထပ်ကြိမ်	3	5	8	9	7	3

(ခ) စာစီစာကုံးပြိုင်ပွဲတွင် ရရှိသောရမှတ်များကိုဖော်ပြသော ထပ်ကြိမ်ပြဇယား

ရမှတ်များ	3	4	5	6	7	8	9	10
ထပ်ကြိမ်	3	6	3	5	4	6	2	1

(ဂ) ကျောင်းသားများ၏သင်္ချာဘာသာရပ်ရမှတ်များကိုဖော်ပြသောထပ်ကြိမ်ပြဇယား

ရမှတ်များ	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99
ထပ်ကြိမ်	3	5	20	32	25	30	5

(ဃ) သင်တန်းသားများ၏ မီတာ 800 အကွာအဝေးအား ပြေးရန်ကြာချိန်ကို ဖော်ပြသော ထပ်ကြိမ်ပြဇယား

ကြာချိန်(စက္ကန့်)	130-134	135-139	140-144	145-149	150-154
ထပ်ကြိမ်	10	10	5	15	5

၂။ ကိန်းလုံးပေါင်း 100 တွင် ကိန်း 4 သည် အကြိမ် 20၊ ကိန်း 5 သည် အကြိမ် 40၊ ကိန်း 6 သည် အကြိမ် 30 တို့ဖြစ်ပြီး ကျန်ကိန်းလုံးများမှာ ကိန်း 7 ဖြစ်လျှင် ထိုကိန်းလုံး 100 ၏ သမတ်ကိန်းကို ထပ်ကြိမ်ပြဇယားတည်ဆောက်ခြင်းဖြင့်ရှာပါ။

၃။ လုပ်သား 40 ဦးတို့အား ၎င်းတို့၏ လုပ်အားခနှင့်ပတ်သက်၍ စစ်တမ်းကောက်ယူကြည့်ရာ တစ်ရက်လျှင် 4800 ကျပ်ရရှိသူ 6 ဦး၊ 5000 ကျပ်ရရှိသူ 5 ဦး၊ 6000 ကျပ်ရရှိသူ 10 ဦး၊ 7500 ကျပ်ရရှိသူ 9 ဦး နှင့် 8000 ကျပ်ရရှိသူ 10 ဦး အသီးသီးဖြစ်ကြသည်။ လုပ်သားများ၏ တစ်ရက်တာလုပ်အားခကိုဖော်ပြသော ထပ်ကြိမ်ပြဇယားတစ်ခု တည်ဆောက်ပါ။ လုပ်သား 40 ဦး၏ ပျမ်းမျှလုပ်အားခကို ရှာပါ။ ထပ်ကြိမ်ပြဇယားမှ ပျမ်းမျှလုပ်အားခအောက် လျော့၍ရရှိသောခန့်မှန်းလုပ်သားဦးရေနှင့် ပျမ်းမျှလုပ်အားခအထက် ရရှိသောခန့်မှန်း လုပ်သားဦးရေကို ဖော်ပြပါ။

၁၁.၂ ယူဆသမတ်ကိန်းအသုံးပြု၍ သမတ်ကိန်းရှာခြင်း

ဖြန့်ချက်တစ်ခု၏သမတ်ကိန်းကို ယူဆသမတ်ကိန်း အသုံးပြု၍လည်း ရှာနိုင်သည်။ ယူဆသမတ်ကိန်းကို သင်္ကေတအားဖြင့် e ဟုသတ်မှတ်ပြီး ကြိုက်နှစ်သက်ရာ ကိန်းတစ်ခုကို ရွေးချယ်နိုင်သည်။

$$\mu = e + \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = e + \frac{\sum d}{n}$$

ဤတွင် d ကို **သွေချက်** (deviation) ဟု ခေါ်ပြီး $d = x - e$ ဖြစ်သည်။ ယူဆသမတ်ကိန်း e ကို **ပျမ်းမျှသွေချက်** $\frac{\sum d}{n}$ ဖြင့် ပေါင်းပါက သမတ်ကိန်းကို ရရှိမည်။

ပုံစံတွက် ၁။ ယူဆသမတ်ကိန်း 9 ကို အသုံးပြု၍ အောက်ပါကိန်းများ၏ သမတ်ကိန်းကို ရှာပါ။

5, 8, 11, 9, 12, 6, 14, 10

$e = 9$

x	သွေချက် $(d = x - e)$
5	-4
8	-1
11	2
9	0
12	3
6	-3
10	5
14	1
	$\Sigma d = 3$

$$\mu = e + \frac{\sum d}{n} = 9 + \frac{3}{8} = 9.375$$

ထပ်ကြိမ်ပြဇယားဖြင့် ဖော်ပြထားသော ဖြန့်ချက်အတွက် ပျမ်းမျှသွေချက်သည် $\frac{\sum fd}{\sum f}$ ဖြစ်သည်။ ထိုအခါ သမတ်ကိန်းကို ရှာရန်ပုံသေနည်းမှာ အောက်ပါအတိုင်းဖြစ်သည်။

$$\boxed{\mu = e + \frac{\sum fd}{\sum f}}$$

ပုံစံတွက် ၂။ အောက်ပါထပ်ကြိမ်ပြဇယားတွင် ကျောင်းသား 100 ၏ အရပ်အမြင့်များကို လက်မဖြင့် အနီးဆုံးယူ၍ဖော်ပြထားသည်။ ယူဆသမတ်ကိန်းသုံး၍ ပျမ်းမျှအရပ်အမြင့်ကို ရှာပါ။

အရပ်အမြင့် (လက်မ)	60-62	63-65	66-68	69-71	72-74
ထပ်ကြိမ်	5	18	42	27	8

$e = 67$ ဟုထားပါ။

အရပ်အမြင့် (လက်မ)	အလယ်မှတ် (x)	သွေချက် $(d = x - e)$	ထပ်ကြိမ် (f)	fd
60-62	61	−6	5	−30
63-65	64	−3	18	−54
66-68	67	0	42	0
69-71	70	3	27	81
72-74	73	6	8	48
			$\sum f = 100$	$\sum fd = 45$

ပျမ်းမျှအရပ်အမြင့် $\mu = e + \frac{\sum fd}{\sum f} = 67 + \frac{45}{100}$

$= 67.45$

လေ့ကျင့်ခန်း ၁၁.၂

၁။ ယူဆသမတ်ကိန်း 7, 4 နှင့် 18 တို့ကို အသုံးပြု၍ အောက်ပါကိန်းတို့၏ သမတ်ကိန်း များကို ရှာပါ။

8, 9, 7, 5, 6, 10, 11

၂။ သင့်လျော်သောယူဆသမတ်ကိန်းတစ်ခုခုထားပြီး အောက်ပါတို့၏သမတ်ကိန်းကို ရှာပါ။

(က) 20, 12, 17, 13, 8, 4.

(ခ) 15, 21, 32, 46, 54, 71, 76.

(ဂ) 2.4, 2.8, 3.6, 7.2.

(ဃ) 1.9, 1.4, 1.1, 0.97, 0.18.

၃။ အောက်ပါထပ်ကြိမ်ပြဇယားသည် ကျောင်းသား 50 ဦးတို့၏ သိပ္ပံဘာသာရပ်ရမှတ်များကို ဖော်ပြထားသည်။ ယူဆသမတ်ကိန်း (က) 67 နှင့် (ခ) 70 တို့ကိုသုံး၍ပျမ်းမျှရမှတ်ကိုရှာပါ။

ရမှတ်များ	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	85-89
ထပ်ကြိမ်	4	6	8	16	10	3	2	1

၄။ လူမှုကူညီရေးလုပ်ငန်းများတွင် ပါဝင်ဆောင်ရွက်ခဲ့ဖူးသော အကြိမ်အရေအတွက်နှင့် ပတ်သက်၍ လူဦးရေ 50 အား စစ်တမ်းကောက်ယူကြည့်ရာ အောက်ပါအတိုင်းတွေ့ရသည်။ ထိုအချက်အလက်များမှ သင့်လျော်သော ယူဆသမတ်ကိန်းတစ်ခုခုအသုံးပြုပြီး သမတ်ကိန်းကို ရှာပါ။

ပါဝင်ဆောင်ရွက်ခဲ့ဖူးသောအကြိမ်	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49
လူဦးရေ	22	9	10	5	4

အခန်း ၁၂ အချိုးတူနှင့်ပြောင်းလဲခြင်း

တိုက်ရိုက်အချိုးတူ၊ ပြောင်းပြန်အချိုးတူနှင့် ယင်းတို့၏ဂရပ်များအကြောင်းကို သိရှိခဲ့ပြီး ဖြစ်သည်။ ယခုသင်ခန်းစာတွင် အချိုးတူဂုဏ်သတ္တိများနှင့် ပြောင်းလဲခြင်း စသည့်အကြောင်းအရာများကို လေ့လာမည်။

ဤသင်ခန်းစာကို သင်ကြားပြီးသောအခါ အချိုးတူဂုဏ်သတ္တိများကို လက်တွေ့ဘဝ ပြဿနာများဖြေရှင်းရာတွင် အသုံးချနိုင်မည်။ တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲခြင်းနှင့် ပြောင်းပြန်ပြောင်းလဲခြင်းဆိုင်ရာပုစ္ဆာများကိုလည်း ဖြေရှင်းနိုင်မည်။

၁၂.၁ အချိုးတူဂုဏ်သတ္တိများ

a : b နှင့် c : d တို့သည် အချိုးတူများဖြစ်ကြလျှင် a : b = c : d သို့မဟုတ် $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ဟု ရေးသည်။ ဤတွင် a, b, c နှင့် d တို့ကို **အချိုးတူကိန်းလုံးများ** (proportionals) ဟုခေါ်သည်။ a နှင့် d တို့ကို **အစွန်းကိန်းများ** (extremes) ဟုခေါ်ပြီး b နှင့် c တို့ကို **အတွင်းကိန်းများ** (means) ဟုခေါ်သည်။

အချိုးတူကိန်းလုံးများတွင် အောက်ပါဂုဏ်သတ္တိများ ရှိကြသည်။

(၁) အချိုးတူတစ်ခုတွင် အတွင်းကိန်းများမြှောက်လဒ်သည် အစွန်းကိန်းများမြှောက်လဒ်နှင့် တူသည်။

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ဖြစ်လျှင် ad = bc ဖြစ်သည်။

သက်သေပြချက်

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ညီမျှခြင်း၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို bd ဖြင့်မြှောက်ပါ။

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd$$

$$ad = bc$$

(၂) အချိုးတူတစ်ခုတွင် အချိုးများကို ပြောင်းပြန်လှန်နိုင်သည်။

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ဖြစ်လျှင် $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ ဖြစ်သည်။

သက်သေပြချက်

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ညီမျှခြင်း၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို $\frac{bd}{ac}$ ဖြင့်မြှောက်ပါ။

$$\frac{a}{b}\times\frac{bd}{ac}=\frac{c}{d}\times\frac{bd}{ac}$$

$$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

(၃) အချိုးတူတစ်ခုတွင် အစွန်းကိန်းများအချင်းချင်းသော်လည်းကော င်း အတွင်းကိန်းများအချင်းချင်းသော်လည်းကောင်း နေရာလဲနိုင်သည်။

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ဖြစ်လျှင် $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ နှင့် $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ တို့ဖြစ်သည်။

သက်သေပြချက်

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$ad = bc$$

ညီမျှခြင်း၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို ab ဖြင့်စားပါ။

$$\frac{ad}{ab}=\frac{bc}{ab}$$

$$\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$$

တစ်ဖန် ညီမျှခြင်း $ad = bc$ ၏နှစ်ဖက်စလုံးကို cd ဖြင့်စားပါ။

$$\frac{ad}{cd}=\frac{bc}{cd}$$

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

(၄) အချိုးတူတစ်ခုတွင် ပထမအချိုးမှပိုင်းခြေကို ယင်း၏ပိုင်းဝေတွင် ပေါင်းခြင်းသည် ဒုတိယအချိုးမှပိုင်းခြေကို ယင်း၏ပိုင်းဝေတွင်ပေါင်းခြင်းနှင့် တူသည်။

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ ဖြစ်လျှင် } \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \text{ ဖြစ်သည်။}$$

အထက်ပါဂုဏ်သတ္တိကို **အတွဲအချိုး** (componendo) ဟုခေါ်သည်။

သက်သေပြချက်

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ညီမျှခြင်း၏ နှစ်ဖက်စလုံးကို 1 ပေါင်းပါ။

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

(၅) အချိုးတူတစ်ခုတွင် ပထမအချိုးမှပိုင်းခြေကို ယင်း၏ပိုင်းဝေတွင်နုတ်ခြင်းသည် ဒုတိယအချိုးမှပိုင်းခြေကို ယင်း၏ပိုင်းဝေတွင်နုတ်ခြင်းနှင့် တူသည်။

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ ဖြစ်လျှင် } \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \text{ ဖြစ်သည်။}$$

အထက်ပါဂုဏ်သတ္တိကို **အနွဲအချိုး** (dividendo) ဟုခေါ်သည်။

သက်သေပြချက်

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ညီမျှခြင်း၏ နှစ်ဖက်စလုံးမှ 1 နုတ်ပါ။

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

(၆)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ ဖြစ်လျှင် } \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \text{ ဖြစ်သည်။}$$

အထက်ပါဂုဏ်သတ္တိကို **တွဲနွဲအချိုး** (componendo and dividendo) ဟုခေါ်သည်။

သက်သေပြချက်

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

ဂုဏ်သတ္တိ (၄) အရ

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad \text{.........} \ (1)$$

ဂုဏ်သတ္တိ (၅) အရ

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad \text{.........} \ (2)$$

ညီမျှခြင်း (1) ကို (2) ဖြင့်စားပါ။

$$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}}=\frac{\frac{c+d}{d}}{\frac{c-d}{d}}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

(၇) အချိုးတူတစ်ခုတွင် အချိုးတစ်ခုချင်းစီ၏တန်ဖိုးသည် အချိုးတူများတွင်ပါဝင်နေသော အချိုးများ၏ ပိုင်းဝေများပေါင်းလဒ်နှင့် ပိုင်းခြေများပေါင်းလဒ်တို့၏ အချိုးတန်ဖိုးနှင့် တူညီသည်။

> $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ဖြစ်လျှင် $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ ဖြစ်သည်။

သက်သေပြချက်

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ ဟု ထားပါ။

$$a=bk, \quad c=dk$$

$$\frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k(b+d)}{(b+d)}=k$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

ပုံစံတွက် ၁။ $a:b=c:d=e:f$ ဖြစ်လျှင် $a^3+c^3+e^3 : b^3+d^3+f^3 = ace : bdf$ ဖြစ်ကြောင်း သက်သေပြပါ။

$a:b=c:d=e:f=k$ ဟု ထားပါ။

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$$

$a=bk,\ c=dk,\ e=fk$

$$\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}=\frac{b^3k^3+d^3k^3+f^3k^3}{b^3+d^3+f^3}=\frac{k^3(b^3+d^3+f^3)}{b^3+d^3+f^3}=k^3$$

$$\frac{ace}{bdf}=\frac{(bk)(dk)(fk)}{bdf}=k^3$$

$$\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}=\frac{ace}{bdf}$$

$a^3+c^3+e^3 : b^3+d^3+f^3 = ace : bdf$

ပုံစံတွက် ၂။ $a+b+c\neq 0$ ဖြစ်လျှင် $\dfrac{a}{b+c-a}=\dfrac{b}{c+a-b}=\dfrac{c}{a+b-c}=1$ ဖြစ်ကြောင်း ပြပါ။

$$\frac{a}{b+c-a}=\frac{b}{c+a-b}=\frac{c}{a+b-c}=\frac{a+b+c}{(b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)}$$

$$=\frac{a+b+c}{a+b+c}$$

$a+b+c\neq 0$ ဖြစ်သဖြင့် $\dfrac{a+b+c}{a+b+c}=1$ ဖြစ်သည်။

$\dfrac{a}{b+c-a}=\dfrac{b}{c+a-b}=\dfrac{c}{a+b-c}=1$ ဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ၃။ $\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{bz-cy}{a}$ ဖြစ်လျှင် $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ ဖြစ်ကြောင်းပြပါ။

$\dfrac{ay-bx}{c}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{bz-cy}{a}=k$ ဟု ထားပါ။

$ay-bx=kc,\quad cx-az=kb,\quad bz-cy=ka$

$(ay-bx)c=kc^2,\quad (cx-az)b=kb^2,\quad (bz-cy)a=ka^2$

ညီမျှခြင်းများကို ပေါင်းသော်

$$ka^2 + kb^2 + kc^2 = 0$$

$$k(a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

$a^2 + b^2 + c^2 > 0$ ဖြစ်သဖြင့် $k = 0$ ဖြစ်သည်။

$k = 0$ ကို ညီမျှခြင်းအသီးသီးတွင် အစားသွင်းပါ။

$$ay - bx = 0$$

$$ay = bx$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \text{ .... (1)}$$

$$cx - az = 0$$

$$cx = az$$

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \text{ .... (2)}$$

ညီမျှခြင်း (1) နှင့် (2) အရ

$\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$ ဖြစ်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၁၂.၁

၁။ $(7x - 5y) : (7x + 5y) = 11 : 31$ ဖြစ်လျှင် $(5x^2 - 4y^2) : (5x^2 + 4y^2)$ ၏တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

၂။ $x : a = y : b = z : c$ ဖြစ်လျှင် $\dfrac{x^3}{a^2} + \dfrac{y^3}{b^2} + \dfrac{z^3}{c^2} = \dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$ ဖြစ်ကြောင်းပြပါ။

၃။ $\dfrac{u}{x-y} = \dfrac{v}{y-z} = \dfrac{w}{z-x}$ ဖြစ်လျှင် $u + v + w = 0$ ဖြစ်ကြောင်းပြပါ။

၄။ $(a + 3b + 2c + 6d)(a - 3b - 2c + 6d) = (a - 3b + 2c - 6d)(a + 3b - 2c - 6d)$ ဖြစ်လျှင် $a : b = c : d$ ဖြစ်ကြောင်းပြပါ။ (အရိပ်အမြွက် - အချိုးပုံစံပြောင်း၍ တွဲခွဲအချိုးသုံးပါ။)

၅။ $\dfrac{a}{b+c} = \dfrac{b}{c+a} = \dfrac{c}{a+b}$ ဖြစ်လျှင် အချိုးတစ်ခုချင်းစီသည် $\dfrac{1}{2}$ သို့မဟုတ် -1 နှင့် ညီကြောင်း ပြပါ။

၆။ သဏ္ဍာန်တူတြိဂံများ၏ ဧရိယာများအချိုးသည် အနားအလျားများ၏နှစ်ထပ်ကိန်းများအချိုးနှင့် တူသည်။ တြိဂံတစ်ခု၏အနားများသည် 8 cm, 10 cm နှင့် 12 cm တို့အသီးသီး ဖြစ်ကြလျှင် ယင်းတြိဂံဧရိယာ၏ 2 ဆရှိသောသဏ္ဍာန်တူတြိဂံ၏အနားများကို ရှာပါ။

၁၂.၂ ပြောင်းလဲခြင်း (Variation)

၁၂.၂.၁ တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲခြင်း (Direct Variation)

မီးရထားတစ်စီးသည် တစ်နာရီ 50 km အမြန်နှုန်းဖြင့် သွားနေသည်ဆိုပါစို့။ မီးရထား သွားရသောအချိန်နှင့် ရောက်နိုင်သောခရီးအကွာအဝေးတို့ကို စဉ်းစားလျှင် အောက်ပါဇယား အတိုင်းတွေ့ရှိရမည်။

အချိန် (x နာရီ)	1	2	3	4	5	6	7
ခရီး (y km)	50	100	150	200	250	300	350

အထက်ဖော်ပြပါဇယားမှ အောက်ပါအချက်များကို လေ့လာတွေ့ရှိရသည်။

(က) ခရီးအကွာအဝေးနှစ်ခုတို့၏ အချိုးသည် သက်ဆိုင်ရာအချိန်များအချိုးနှင့် အမြဲတူညီသည်။

ဥပမာ $50 : 100 = 1 : 2$

သို့မဟုတ် $50 : 250 = 1 : 5$

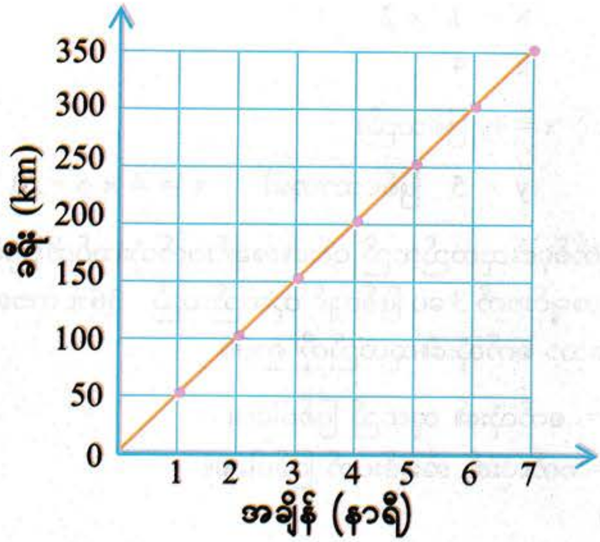
သို့မဟုတ် $150 : 350 = 3 : 7$ ဖြစ်သည်။

(ခ) ခရီးအကွာအဝေး (km) နှင့် သွားရန်ကြာချိန် (နာရီ) တို့အချိုးသည် တစ်သမတ်တည်း ဖြစ်သည်။ 50 km / hr ဖြစ်သည်။

(ဂ) ခရီးနှင့်အချိန်တို့သည် တစ်ပြိုင်တည်းတိုးသည် သို့မဟုတ် လျော့သည်။ ၎င်းတို့သည် အတူတကွ ပြောင်းလဲကြသည်ကို တွေ့ရ၏။

ခရီးနှင့်အချိန်တို့သည် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲနေကြသည်ဟု ပြောဆိုကြသည်။ ခရီးသည် အချိန်နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲနေသည် သို့မဟုတ် တိုက်ရိုက်အချိုးကျနေသည်ဟုလည်း ပြောနိုင် သည်။

အထက်ဖော်ပြပါဇယားတွင်ပါရှိသည့် ခရီးနှင့်အချိန်တို့ ဆက်သွယ်ဖော်ပြသောဂရပ်ကို ဆွဲကြည့်လျှင် တစ်ဖက်ပါအတိုင်း တွေ့ရသည်။



ဂရပ်ကိုကြည့်ရှုခြင်းဖြင့် ဂရပ်တွင်ပါဝင်သော အမှတ်များကို ဆက်သောမျဉ်းမှာမျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်းဖြစ်ပြီး မူလမှတ် (0, 0) ကို ဖြတ်သွားကြောင်းတွေ့ရှိရသည်။ တန်ဖိုးနှစ်ခုတို့သည် တိုက်ရိုက်အချိုးကျနေပါက ၎င်းတို့၏ဂရပ်တွင်ပါဝင်နေသော အမှတ်များသည် မျဉ်းဖြောင့်တစ်ကြောင်းဖြစ်ပြီး မူလမှတ်ကို ဖြတ်သွားကြောင်း သိရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။

ဤပုစ္ဆာပုံစံများသည် တိုက်ရိုက်အချိုးတူပုစ္ဆာများဖြစ်၍ ယခင်က ခုကိန်းတွက်နည်းသို့မဟုတ် အချိုးနည်းကို အသုံးပြု၍ တွက်ချက်ခဲ့သည်။ ဤသဘောတရားကိုအခြေခံ၍ အထက်ပုစ္ဆာပါ တိုက်ရိုက်အချိုးတူခြင်းကို ပြောင်းလဲခြင်းသဘောဖြင့်ဖော်ပြနိုင်သည်။

(က) y သည် x နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲသည်။

(ခ) သင်္ကေတအားဖြင့် $y \propto x$ ဖြစ်သည်။

(ဂ) ထိုအခါ $y = kx$ ဖြစ်ပြီး k သည် **ပြောင်းလဲခြင်းကိန်းသေ** (constant of variation) ဖြစ်သည်။

အထက်ပါဥပမာတွင် $k = 50$ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ x သည် y နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲနေ၏။ $y = 2$ ဖြစ်သောအခါ $x = 8$ ဖြစ်လျှင် ပြောင်းလဲခြင်းကိန်းသေကို ရှာပါ။ ထို့ပြင် $y = 5$ ဖြစ်သောအခါ x ၏တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

$x \propto y$

$x = ky$, k = ပြောင်းလဲခြင်းကိန်းသေ

$y = 2$ ဖြစ်သောအခါ $x = 8$ ဖြစ်သည်။

$8 = k \times 2$

$k = 4$

ထို့ကြောင့် $x = 4y$ ဖြစ်သည်။

$y = 5$ ဖြစ်သောအခါ $x = 4 \times 5 = 20$ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၂။ စက်လုံးတစ်ခု၏ထုထည်သည် ၎င်း၏အချင်းဝက်သုံးထပ်ကိန်းနှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲနေ၏။ အချင်းဝက် 3 ပေ ဖြစ်လျှင် ထုထည်သည် 36π ကုဗပေဖြစ်၏။ အချင်းဝက် 2 ပေရှိသော စက်လုံး၏ထုထည်ကို ရှာပါ။

$V =$ စက်လုံး၏ ထုထည် ဖြစ်ပါစေ။

$r =$ စက်လုံး၏ အချင်းဝက် ဖြစ်ပါစေ။

ထိုအခါ

$V \propto r^3$

$V = kr^3$, $k =$ ပြောင်းလဲခြင်းကိန်းသေ

$r = 3$ ဖြစ်သောအခါ $V = 36\pi$

$36\pi = k(3)^3$

$36\pi = k \times 27$

$k = \frac{36\pi}{27}$

$k = \frac{4}{3}\pi$

ထိုအခါ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ဖြစ်သည်။

$r = 2$ ဖြစ်သောအခါ $V = \frac{4}{3}\pi (2)^3$

$V = \frac{4}{3}\pi \times 8 = \frac{32}{3}\pi$

စက်လုံး၏ထုထည်သည် $\frac{32}{3}\pi$ ကုဗပေဖြစ်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၁၂.၂

၁။ အောက်ဖော်ပြပါဇယားတွင် မိုးပျံပူဖောင်းတစ်ခု အထက်သို့တက်ရန်ကြာချိန်နှင့် ထိုအချိန်တွင်ရောက်ရှိမည့် အမြင့်ကိုဖော်ပြထားသည်။ ထိုအမြင့်သည်တက်ရန်ကြာချိန်နှင့်တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲမှုရှိလျှင် * ပြထားသောနေရာများတွင် သက်ဆိုင်ရာကိန်းများဖြင့် ဖြည့်စွက်ပါ။

အချိန် (မိနစ်)	2	3	*	25	*
အမြင့် (m)	*	36	84	*	1860

၂။ $y \propto x$ ဟုယူဆလျက် အောက်ဖော်ပြပါဇယားအား ပြည့်စုံအောင်ဖြည့်စွက်ပါ။

x	2	5	8		
y		20		40	7

၃။ $y = \dfrac{3}{2}x$ ကို အသုံးပြု၍ အောက်ပါဇယားကို ပြည့်စုံအောင်ဖြည့်စွက်ပါ။

x	6	7	−4	9		
y					21	−1

၄။ အောက်ဖော်ပြပါ ပုစ္ဆာတစ်ခုစီအတွက် ဖော်ပြပါသင်္ကေတများကို အသုံးပြု၍ $y \propto x$ နှင့် $y = kx$ ပုံစံဖြင့်ရေးပါ။

(က) သုံးနားညီတြိဂံ၏ပတ်လည်အနား p သည် အနားတစ်ဖက်အလျား x နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲ၏။

(ခ) စက်ဝိုင်းတစ်ခု၏စက်ဝန်း c သည် အချင်းဝက် r နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲ၏။

(ဂ) မှန်မှန်မောင်းနေသော ကားတစ်စီးသွားခဲ့သော ခရီးအကွာအဝေး s km သည် သွားခဲ့သောအချိန် t hours နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲ၏။

(ဃ) ကုန်ပစ္စည်းပို့ခ k ကျပ်သည် သယ်ယူသောအကွာအဝေး d km နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲ၏။

၅။ $y = kx$ တွင် $x = 6$ ဖြစ်သောအခါ $y = 15$ ဖြစ်၏။ ကိန်းသေ k ကို ရှာပါ။ $x = 10$ ဖြစ်သောအခါ y တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

၆။ y သည် x နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲ၏။ $x = 3$ ဖြစ်သောအခါ $y = 6$ ဖြစ်သည်။ $x = 1$ ဖြစ်သောအခါ y တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

၇။ $y \propto x$ ဖြစ်၏။ $x = 8$ ဖြစ်သောအခါ $y = 4$ ဖြစ်၏။ $x = 8$ ဖြစ်သောအခါ y တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

၈။　y သည် x နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲ၏။ x = 3 ဖြစ်သောအခါ y = 11 ဖြစ်၏။ y နှင့် x တို့၏ ဆက်သွယ်ချက်ကိုဖော်ပြသော ညီမျှခြင်းကိုရှာပါ။ ယင်းညီမျှခြင်းကို အသုံးပြု၍

(က) x = 9 ဖြစ်သောအခါ y တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

(ခ) y = 52 ဖြစ်သောအခါ x တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

၁၂.၂.၂ ပြောင်းပြန်ပြောင်းလဲခြင်း (Inverse Variation)

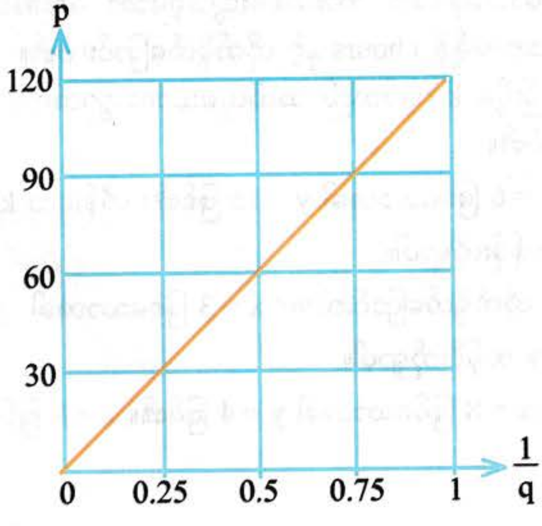
ဥပမာ ၁။ အလုပ်တစ်ခုကို လုပ်ရာတွင် လိုအပ်သောလူဦးရေနှင့် ကြာမည့်ရက်များကို အောက်ပါဇယားတွင်ဖော်ပြထားသည်။

လူဦးရေ (q)	1	2	3	4	5	6	8	10
ကြာမည့်ရက် (p)	120	60	40	30	24	20	15	12

ဇယားကို ကြည့်ခြင်းအားဖြင့် p သည် q နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲမှု မရှိကြောင်းကို တွေ့ရသည်။

အကယ်၍ $\frac{1}{q}$ နှင့် p တန်ဖိုးတို့ကို လေ့လာမည်ဆိုပါက အောက်ပါဇယားနှင့် ဖော်ပြပါဂရပ် တို့ကိုရရှိမည်။

$\frac{1}{q}$	1	0.5	0.33	0.25	0.20	0.17	0.13	0.1
p	120	60	40	30	24	20	15	12



ဂရပ်တွင် မျဉ်းဖြောင့်တစ်ခုရရှိပြီး မူလမှတ်ကို ဖြတ်သွားကြောင်းတွေ့ရသဖြင့် p သည် $\frac{1}{q}$ နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲကြောင်း မှတ်ချက်ချနိုင်ပါသည်။

ထိုအခါ $p \propto \frac{1}{q}$ ဖြစ်၍

$p = \frac{k}{q}$ ဖြစ်ပြီး

$pq = k$ ဟုရေးနိုင်ပါသည်။

တစ်နည်းအားဖြင့် p သည် q နှင့် ပြောင်းပြန်ပြောင်းလဲသည်။ ယခင်က ဤကဲ့သို့ သောပုစ္ဆာများကို ပြောင်းပြန်အချိုးတူအဖြစ် တွေ့ရှိခဲ့ပြီးဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၂။ p သည် q နှင့် ပြောင်းပြန်ပြောင်းလဲနေ၏။ $p = 30$ ဖြစ်သောအခါ $q = 4$ ဖြစ်၏။ $q = 9$ ဖြစ်သောအခါ p တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

$$p \propto \frac{1}{q}$$

$$p = \frac{k}{q}$$

$$30 = \frac{k}{4}$$

$$k = 120$$

ထို့ကြောင့် $P = \frac{120}{q}$ ဖြစ်သည်။

$q = 9$ ဖြစ်သောအခါ $p = \frac{120}{9} = 13\frac{1}{3}$ ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၃။ စက်ရုံတစ်ခုရှိ ကျွမ်းကျင်ဝန်ထမ်း 1 ဦးလုပ်အားသည် အလုပ်သင်ဝန်ထမ်း 1 ဦး လုပ်အား၏ 3 ဆဖြစ်သည်။ ပုံမှန်ဝန်ထမ်းတစ်ဦးလုပ်အားသည် အလုပ်သင်ဝန်ထမ်း 1 ဦးလုပ်အား၏ 2 ဆဖြစ်သည်။ ကျွမ်းကျင်ဝန်ထမ်း 3 ဦး၊ ပုံမှန်ဝန်ထမ်း 4 ဦးနှင့် အလုပ်သင်ဝန်ထမ်း 5 ဦးပါဝင်သော အဖွဲ့တစ်ခုသည် အလုပ်တစ်ခုကို ပြီးရန် 51 ရက် ကြာသည်။ ထိုအလုပ်ကိုပင် ကျွမ်းကျင်ဝန်ထမ်း 7 ဦး၊ ပုံမှန်ဝန်ထမ်း 5 ဦးနှင့် အလုပ်သင်ဝန်ထမ်း 3 ဦးတို့ ပါဝင်သောအဖွဲ့က လုပ်ဆောင်မည်ဆိုပါက ရက်မည်မျှ ကြာမည်နည်း။

ရှေးဦးစွာ ပထမအဖွဲ့မှကျွမ်းကျင်ဝန်ထမ်းများ၏လုပ်အားများနှင့် ပုံမှန်ဝန်ထမ်းများ၏လုပ်အားများကို အလုပ်သင်ဝန်ထမ်းမည်မျှ၏လုပ်အားနှင့်ညီကြောင်း ဦးစွာရှာမည်။

အလုပ်သင်ဝန်ထမ်း 1 ဦး၏လုပ်အား = x ဟုထားပါ။

ကျွမ်းကျင်ဝန်ထမ်း 1 ဦး၏လုပ်အား = 3 × အလုပ်သင်ဝန်ထမ်း 1 ဦး၏လုပ်အား

= 3x

ပုံမှန်ဝန်ထမ်းတစ်ဦး၏လုပ်အား = 2 × အလုပ်သင်ဝန်ထမ်း 1 ဦး၏လုပ်အား

= 2x

ပထမအဖွဲ့၏စုစုပေါင်းလုပ်အား = ကျွမ်းကျင်ဝန်ထမ်း 3 ဦး + ပုံမှန်ဝန်ထမ်း 4 ဦး + အလုပ်သင်ဝန်ထမ်း 5 ဦး

$= 3\,(3x) + 4\,(2x) + 5\,(x) = 22\,x$

ပထမအဖွဲ့၏စုစုပေါင်းလုပ်အားသည် အလုပ်သင်ဝန်ထမ်း 22 ဦး၏လုပ်အားနှင့် ညီမျှသည်။

ဒုတိယအဖွဲ့၏စုစုပေါင်းလုပ်အား = ကျွမ်းကျင်ဝန်ထမ်း 7 ဦး + ပုံမှန်ဝန်ထမ်း 5 ဦး + အလုပ်သင်ဝန်ထမ်း 3 ဦး

$= 7\,(3x) + 5\,(2x) + 3\,(x) = 34\,x$

ဒုတိယအဖွဲ့၏စုစုပေါင်းလုပ်အားသည် အလုပ်သင်ဝန်ထမ်း 34 ဦး၏လုပ်အားနှင့် ညီမျှသည်။

အလုပ်သင်ဝန်ထမ်းဦးရေ	ကြာမည့်ရက်
22 ဦး	51 ရက်
34 ဦး	?

အလုပ်သင်ဝန်ထမ်းဦးရေကို p ဟုထား၍ ကြာမည့်ရက်ပေါင်းကို q ဟုထားပါ။ ကြာမည့်ရက်ပေါင်းသည် အလုပ်သင်ဝန်ထမ်းဦးရေနှင့် ပြောင်းပြန်ပြောင်းလဲနေသည်။ ထို့ကြောင့်

$$q \propto \frac{1}{p}$$

$$q = \frac{k}{p}$$ (k = ပြောင်းလဲခြင်းကိန်းသေ) ဖြစ်သည်။

p = 22 နှင့် q = 51 ဖြစ်သောအခါ

$$51 = \frac{k}{22}$$

$$k = 1122$$

$p = 34$ ဖြစ်သောအခါ

$$q = \frac{1122}{34}$$

$q = 33$ ဖြစ်သည်။

ထို့ကြောင့် ကြာမည့်ရက်ပေါင်းသည် 33 ရက် ဖြစ်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၁၂.၃

၁။ အောက်ဖော်ပြပါဇယားတွင် (*) ပြနေရာများ၌ သက်ဆိုင်ရာတန်ဖိုးများဖြင့်ဖြည့်စွက်ပါ။
x သည် y နှင့် ပြောင်းပြန်ပြောင်းလဲသည်။

x	50	75	*	150	*
y	300	*	150	*	75

၂။ $y = \dfrac{4}{x}$ ညီမျှခြင်းတွင် x နှင့် y တို့၏ ဆက်စပ်ပုံကို ဖော်ပြပါ။
(က) $x = 2$ ဖြစ်သောအခါ y တန်ဖိုးကို ရှာပါ။
(ခ) $y = 0.1$ ဖြစ်သောအခါ x တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

၃။ y သည် x နှင့် ပြောင်းပြန်ပြောင်းလဲ၏။ $x = 4$ ဖြစ်သောအခါ $y = 3$ ဖြစ်၏။ y နှင့် x တို့ဆက်သွယ်သော ညီမျှခြင်းကိုရှာပါ။ $x = 6$ ဖြစ်သောအခါ y ကိုရှာပါ။

၄။ $y \propto \dfrac{1}{x}$ ဖြစ်၏။ $x = 14$ ဖြစ်သောအခါ $y = 6$ ဖြစ်၏။ x နှင့် y တို့ဆက်သွယ်သောညီမျှခြင်းကိုရှာပါ။ $x = 28$ ဖြစ်သောအခါ y ကိုရှာပါ။

၅။ $p \propto \dfrac{1}{q}$ ဖြစ်၏။ $q = 5$ ဖြစ်သောအခါ $p = 6$ ဖြစ်၏။ $q = 12$ ဖြစ်သောအခါ p ကိုရှာပါ။

၆။ $zx = k$ တွင် k သည် ကိန်းသေဖြစ်၏။ $x = 2.5$ ဖြစ်သောအခါ $z = 18$ ဖြစ်၏။ $x = 3.6$ ဖြစ်သောအခါ z ကို ရှာပါ။

၇။ y သည် x နှင့် ပြောင်းပြန်ပြောင်းလဲ၏။ $x = 3$ ဖြစ်သောအခါ $y = 8$ ဖြစ်၏။
(က) x နှင့် y တို့ဆက်သွယ်သော ညီမျှခြင်းကိုရှာပါ။
(ခ) $x = 60$ ဖြစ်သောအခါ y ကိုရှာပါ။
(ဂ) $y = 15$ ဖြစ်သောအခါ x ကိုရှာပါ။

၈။ H သည် R နှင့် ပြောင်းပြန်ပြောင်းလဲ၏။

(က) $R = 500$ ဖြစ်သောအခါ $H = 12.8$ ဖြစ်၏။ H နှင့် R တို့ဆက်စပ်သော ညီမျှခြင်းကို ရှာပါ။

(ခ) $R = 480$ ဖြစ်သောအခါ H ကိုရှာပါ။

၉။ တစ်နေ့လျှင် 10 နာရီအလုပ်လုပ်ပါက အလုပ်တစ်ခုကို 13 ရက်နှင့်ပြီးရန် လုပ်သားကြီး 14 ဦး လုပ်ရသည်။ လုပ်သားကြီး 10 ဦးတို့သည် ထိုအလုပ်ကို တစ်နေ့လျှင် 12 နာရီလုပ်မည်ဆိုပါက ရက်ပေါင်းမည်မျှကြာမည်နည်း။

၁၂.၂.၃ ဆက်စပ်ပြောင်းလဲခြင်း (Joint Variation)

ကိန်းရှင် y သည် ကိန်းရှင် x နှင့် z (ကိန်းရှင်နှစ်ခု သို့မဟုတ် နှစ်ခုထက်ပိုသော) ကိန်းရှင်များဖြင့် တိုက်ရိုက်သော်လည်းကောင်း၊ ပြောင်းပြန်သော်လည်းကောင်း ပြောင်းလဲမှုဖြစ်နေလျှင် y သည် x နှင့် z တို့ဖြင့် ဆက်စပ်ပြောင်းလဲသည်ဟု ခေါ်သည်။

ဆိုလိုသည်မှာ $y \propto xz$ သို့မဟုတ် $y \propto \frac{1}{xz}$ ဖြစ်သည်။

တစ်နည်းအားဖြင့် $y = kxz$ သို့မဟုတ် $y = \frac{k}{xz}$ (k = ပြောင်းလဲခြင်းကိန်းသေ) ဖြစ်သည်။

ဥပမာ ၁။ y သည် x^2 နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲ၍ z နှင့် ပြောင်းပြန်ပြောင်းလဲ၏။ $x = 6$ နှင့် $z = 9$ ဖြစ်သောအခါ $y = 12$ ဖြစ်သည်။ $x = 9$ နှင့် $z = 12$ ဖြစ်သောအခါ y တန်ဖိုးကို ရှာလိုသည်ဆိုပါစို့။

$$y \propto \frac{x^2}{z}$$

$$y = k\frac{x^2}{z} \quad (k = \text{ပြောင်းလဲခြင်းကိန်းသေ})$$

$x = 6, y = 12$ နှင့် $z = 9$ ဖြစ်သောအခါ

$$12 = k \times \frac{6^2}{9}$$

$$k = \frac{12 \times 9}{36} = \frac{108}{36} = 3 \text{ ဖြစ်သည်။}$$

$x = 9$ နှင့် $z = 12$ ဖြစ်သောအခါ

$$y = 3 \times \frac{9^2}{12} = 20.25 \text{ ဖြစ်သည်။}$$

ဥပမာ ၂။ အလုပ်သမား 6 ယောက်တို့သည် တစ်နေ့လျှင် 10 နာရီနှုန်းဖြင့် အလုပ်လုပ်ရာ 144 စတုရန်းကိုက်ကျယ်သော အားကစားကွင်းကို 21 ရက်ကြာအောင် ဖောက်ရ၏။ အလုပ်သမား 8 ယောက်တို့သည် တစ်နေ့လျှင် 7 နာရီနှုန်းဖြင့် အလုပ်လုပ်သော် 160 စတုရန်းကိုက်ကျယ်သော အားကစားကွင်းကို ရက်ပေါင်းမည်မျှကြာအောင် ဖောက်ရမည်နည်း။

ဤတွင် 144 စတုရန်းကိုက် ပြီးရန် 21 ရက်ကြာသည်။ 160 စတုရန်းကိုက် ပြီးရန်ကြာမည့်ရက်ကို စဉ်းစားသည့်အခါ ဧရိယာများလာခြင်းကြောင့် ရက်လည်းများလာမည်။ ရက်ပေါင်းသည် ဧရိယာနှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲနေသည်။

တစ်ဖန် အလုပ်သမား 6 ယောက်သည် 10 နာရီ အလုပ်လုပ်သောကြောင့် တစ်ရက်လုပ်အားနာရီပေါင်း 60 နာရီ ဖြစ်မည်။ အလုပ်သမား 8 ယောက်က 7 နာရီအလုပ်လုပ်ပါက တစ်ရက်လုပ်အားနာရီပေါင်း 56 နာရီ ဖြစ်မည်။ တစ်ရက်လျှင် 60 နာရီနှုန်းဖြင့်လုပ်ပါက 21 ရက်ကြာမည်။ တစ်ရက်လျှင် 56 နာရီနှုန်းဖြင့်လုပ်ပါက အလုပ်ချိန်နည်းသောကြောင့် ရက်ပိုကြာမည်ဖြစ်၍ ရက်ပေါင်းသည် လုပ်အားနာရီနှင့် ပြောင်းပြန်ပြောင်းလဲနေသည်။

ဧရိယာ	လုပ်အားနာရီပေါင်း	ကြာမည့်ရက်ပေါင်း
144	60	21
160	56	?

ကြာမည့်ရက်ပေါင်းကို x ၊ ဧရိယာကို y ၊ လုပ်အားနာရီပေါင်းကို z ဟုထားပါ။ ထိုအခါ

$$x \propto \frac{y}{z}$$

$$x = \frac{ky}{z}$$ (k = ပြောင်းလဲခြင်းကိန်းသေ) ဖြစ်သည်။

$x = 21, y = 144$ နှင့် $z = 60$ ဖြစ်သောအခါ

$$21 = \frac{k\times 144}{60}$$

$k = 8.75$ ဖြစ်သည်။

$y = 160$ နှင့် $z = 56$ ဖြစ်သောအခါ

$$x = \frac{8.75\times 160}{56} = 25$$ ဖြစ်သည်။

ထို့ကြောင့် ကြာမည့်ရက်ပေါင်းသည် 25 ရက် ဖြစ်သည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၁၂.၄

၁။ Q သည် x^2 နှင့် တိုက်ရိုက်ပြောင်းလဲ၍ y နှင့် ပြောင်းပြန်ပြောင်းလဲ၏။ $Q = 1$ နှင့် $x = 3$ ဖြစ်သောအခါ $y = 18$ ဖြစ်သည်။ $x = 10$ နှင့် $y = 32$ ဖြစ်လျှင် Q တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

၂။ $y \propto xz$ ဖြစ်သည်။ $x = 4$ နှင့် $z = 9$ ဖြစ်သောအခါ $y = 18$ ဖြစ်သည်။ $x = 6$ နှင့် $y = 2.5$ ဖြစ်လျှင် z တန်ဖိုးကိုရှာပါ။

၃။ အမြင့် 6 ပေနှင့် အရှည် 180 ကိုက်ရှိသော အုတ်တံတိုင်းတစ်ခုကို ဆောက်လုပ်ရန် အလုပ်သမား 12 ယောက်သည် ရက်ပေါင်း 30 အချိန်ယူရ၏။ အလုပ်သမား 15 ယောက်သည် အမြင့် 8 ပေရှိပြီး အလျား 150 ကိုက်ရှိသည့် အုတ်တံတိုင်းကို ဆောက်လုပ်ရန် ရက်ပေါင်းမည်မျှ ကြာမည်နည်း။

၄။ တစ်နေ့လျှင် 10 နာရီအလုပ်လုပ်ပါက အလုပ်တစ်ခုကို 13 ရက်နှင့်ပြီးရန် လုပ်သားကြီး 14 ဦး လုပ်ရသည်။ လုပ်သားကြီး ၁၀ ဦးတို့သည် ထိုအလုပ်ကို တစ်နေ့လျှင် 12 နာရီ လုပ်မည်ဆိုပါက ရက်ပေါင်းမည်မျှကြာမည်နည်း။

၅။ မြင်းကောင်ရေ 4 ကောင်အားရှိသောစက်ဖြင့် ပေ 200 မြင့်သောတောင်ကုန်းထိပ်သို့ ရေဂါလန် 800 တင်ရန် 3 နာရီ ကြာ၏။ မြင်းကောင်ရေ 7 ကောင်အားရှိသောစက်ဖြင့် ပေ 150 အမြင့်သို့ 9 နာရီကြာ ရေတင်မည်ဆိုပါက ဂါလံပေါင်းမည်မျှ တင်နိုင်မည်နည်း။

၆။ အလုပ်သမား 56 ယောက်သည် $\frac{1}{4}$ မိုင် ရှည်သောလမ်းကို ခင်းရန် 5 ရက်ကြာသည်။ $\frac{3}{4}$ မိုင် ရှည်သောလမ်းကို 5 ရက်နှင့် အပြီးခင်းနိုင်ရန် အလုပ်သမားမည်မျှ ထပ်ခေါ်ရမည် နည်း။

၇။ အကျယ် 2 ပေရှိသော ခြေလှမ်းဖြင့် 1 မိနစ်လျှင် ခြေလှမ်း 80 သွားရာ 45 မိနစ်တွင် ခရီးတစ်ခုကိုရောက်၏။ ထိုခရီးကို အကျယ် 28 လက်မရှိသော ခြေလှမ်းဖြင့် တစ်မိနစ်လျှင် ခြေလှမ်း 120 သွားမည်ဆိုပါက အချိန်မည်မျှကြာမည်နည်း။

၈။ အိုင်တီပညာရှင် 19 ဦးပါဝင်သော အဖွဲ့တစ်ခုသည် တစ်ရက်လျှင် 8 နာရီနှုန်းဖြင့် 19 ရက်အတွင်း အလုပ်တစ်ခုပြီးရန် တာဝန်ယူထားသည်။ 10 ရက် လုပ်ပြီးသောအခါ စက်ပစ္စည်း ချို့ယွင်းမှုကြောင့် 2 ရက်နားလိုက်ရသည်။ ထို့နောက် ပညာရှင်များမှ 4 ဦးသည် အခြားအလုပ်တစ်ခုအတွက် ခရီးထွက်သွားကြသည်။ ထိုအလုပ်ကို တာဝန်ယူထားသည့်ရက်အတွင်းပြီးရန် တစ်ရက်လျှင် 9 နာရီနှုန်းဖြင့် လုပ်မည်ဆိုပါက ပညာရှင်မည်မျှ ထပ်ဖြည့်ရမည်နည်း။

၉။ 700 ကိုက်ရှည်သော မြောင်းတစ်ခုကိုတူးရန် ရက်ပေါင်း 30 သာအချိန်ရသည်။ သို့သော် လုပ်သား 18 ဦးသည် 12 ရက်အကြာတွင် ကိုက် 200 သာပြီး၏။ အချိန်မီပြီးရန် လုပ်သားမည်မျှ ထပ်ခေါ်ရမည်နည်း။

အခန်း ၁၃ လူမှုရေးသင်္ချာ

ဤသင်ခန်းစာတွင် ဘဏ်လုပ်ငန်းများတွင်အသုံးပြုသော ရိုးရိုးအတိုး၊ နှစ်ထပ်တိုးနှင့် နှစ်ထပ်တိုးနိယာမများအပြင် စီးပွားရေးလုပ်ငန်းရှင်များ စိတ်ဝင်စားကြသော အစုရှယ်ယာနှင့် စတော့ရှယ်ယာများအကြောင်းကို လေ့လာကြမည်။ ဤသင်ခန်းစာကိုသင်ယူပြီးပါက စီးပွားရေးပညာ၏အခြေခံအချက်များကို သိရှိနိုင်ပါမည်။

၁၃.၁ ရိုးရိုးအတိုး (Simple Interest)

မူလငွေရင်းပေါ်တွင် သတ်မှတ်ထားသောနှုန်းဖြင့် တွက်ယူထားသောငွေကို **ရိုးရိုးအတိုး** ဟုခေါ်သည်။ အတိုးနှုန်းကို တစ်နှစ်အတွက် ငွေရင်း 100 ကျပ်၏ ရာခိုင်နှုန်းအဖြစ် ဖော်ပြလေ့ရှိသည်။

ငွေတစ်ရပ်အပေါ်တွင် သတ်မှတ်ထားသောနှုန်းဖြင့် တွက်ယူသော အတိုးကို **ရိုးရိုးအတိုး** ဟုခေါ်သည်။ အတိုးနှုန်းကို ဖော်ပြလေ့ရှိသည်။

ငွေရင်းနှင့် အတိုးနှစ်ရပ်ပေါင်းကို **တိုးရင်းပေါင်း** ဟုခေါ်လေ့ရှိသည်။

တိုးရင်းပေါင်း = ငွေရင်း + အတိုး

ဥပမာ ၁။ တစ်နှစ်လျှင် အတိုးနှုန်း 6 % ဖြင့် 1500 ကျပ်ပေါ်တွင် 4 နှစ်အတွက် ရိုးရိုးအတိုးကိုရှာပါ။

ငွေ 100 ကျပ်ပေါ်တွင် 1 နှစ်အတွက် ရိုးရိုးအတိုး $= 6$ ကျပ်

ငွေ 100 ကျပ်ပေါ်တွင် 4 နှစ်အတွက် ရိုးရိုးအတိုး $= 6 \times 4$

ငွေ 1500 ကျပ်ပေါ်တွင် 4 နှစ်အတွက် ရိုးရိုးအတိုး $= \dfrac{1500 \times 6 \times 4}{100}$

$= 360$ ကျပ်

$\therefore$ ရိုးရိုးအတိုး $= 360$ ကျပ်

အထက်ပါ ဥပမာပုစ္ဆာကို လေ့လာပြီး ငွေရင်း၊ အတိုးနှုန်း၊ အချိန်ကာလတို့ကို ပေးထားသောအခါ ရိုးရိုးအတိုးကို ရှာယူနိုင်သည့် ပုံသေနည်းကို ဆက်လက်စဉ်းစားမည်။

အထက်ပါပုစ္ဆာတွင် ငွေရင်း $= 1500$ ကျပ်

အတိုးနှုန်း $= 6$ %

အချိန် $= 4$ နှစ် ဖြစ်သည်။

ငွေရင်း (principal) ကို P ၊ **ရိုးရိုးအတိုး** (simple interest) ကို I ၊ **အချိန်**ကို n ၊ **အတိုးနှုန်း** (interest rate)ကို r % ဟု ရေးမှတ်ပြီး ရိုးရိုးအတိုး I ကိုရှာမည်။

ဥပမာ ၂။ ငွေရင်း P ကျပ်ပေါ်တွင် တစ်နှစ်လျှင် အတိုးနှုန်း r ရာခိုင်နှုန်းဖြင့် အချိန် n နှစ်အတွက် ရိုးရိုးအတိုးကို ရှာပါ။

ငွေရင်း = P ကျပ်
အတိုးနှုန်း = r %
အချိန် = n နှစ်

ငွေ 100 ကျပ်ပေါ်တွင် 1 နှစ်အတွက် ရိုးရိုးအတိုး = r ကျပ် ဖြစ်သည်။

ငွေ 100 ကျပ်ပေါ်တွင် n နှစ်အတွက် ရိုးရိုးအတိုး = $n \times r$

ငွေ P ကျပ်ပေါ်တွင် n နှစ်အတွက် ရိုးရိုးအတိုး = $\dfrac{P \times n \times r}{100}$

∴ ရိုးရိုးအတိုး = $\dfrac{P \times n \times r}{100}$ ဖြစ်သည်။

ရိုးရိုးအတိုးကို I ထားလျှင်

$$\boxed{I = \frac{P \times n \times r}{100}}$$

$$I = P \times n \times \frac{r}{100} = P \times n \times r\,\%$$

တစ်နည်း **ရိုးရိုးအတိုး = ငွေရင်း × အချိန် × အတိုးနှုန်း**

ဤပုံသေနည်းဖြင့် ရိုးရိုးအတိုးရှာသည့် ပုစ္ဆာများကို လွယ်ကူစွာတွက်ချက်နိုင်သည်။

ပုံစံတွက် ၁။ တစ်နှစ်လျှင် အတိုးနှုန်း 5 ရာခိုင်နှုန်းဖြင့် ငွေ 3200 ကျပ်ပေါ်တွင် 18 လအတွက် ရိုးရိုးအတိုးကို ရှာပါ။

$$I = \frac{P\times n\times r}{100} = \frac{3200\times\frac{18}{12}\times 5}{100} = 240 \text{ ကျပ်}$$

∴ ရိုးရိုးအတိုး = 240 ကျပ်

ပုံစံတွက် ၂။ ငွေ 750 ကျပ်ကို အတိုးနှုန်း 8 % ဖြင့် 2 နှစ်အတွက်
(က) ရိုးရိုးအတိုးကိုရှာပါ။ (ခ) တိုးရင်းပေါင်းကို ရှာပါ။

(က) ရိုးရိုးအတိုး $I = \dfrac{P\times n\times r}{100} = \dfrac{750\times 2\times 8}{100} = 120$ ကျပ်

(ခ) တိုးရင်းပေါင်း = 750 + 120 = 870 ကျပ်

∴ ရိုးရိုးအတိုး = 120 ကျပ် ၊ တိုးရင်းပေါင်း = 870 ကျပ်

ပုံစံတွက် ၃။ ငွေ 1080 ကျပ်ပေါ်တွင် တစ်နှစ်လျှင် အတိုးနှုန်း 10 % ဖြင့် 1 နှစ် 3 လအတွက်
(က) ရိုးရိုးအတိုးကိုရှာပါ။ (ခ) တိုးရင်းပေါင်းကို ရှာပါ။

(က) ရိုးရိုးအတိုး $I = \dfrac{P\times n\times r}{100} = \dfrac{1080 \times \frac{15}{12} \times 10}{100} = 135$ ကျပ်

(ခ) တိုးရင်းပေါင်း = ငွေရင်း + အတိုး

= 1080 + 135 = 1215 ကျပ်

∴ ရိုးရိုးအတိုး = 135 ကျပ် ၊ တိုးရင်းပေါင်း = 1215 ကျပ်

ပုံစံတွက် ၄။ ငွေတစ်ရပ်ကို အတိုးနှုန်း $3\frac{1}{2}$ % ဖြင့် 4 နှစ်တွင် ရိုးရိုးအတိုး 77 ကျပ်ပေးရသော်
(က) ငွေရင်း မည်မျှဖြစ်သနည်း။ (ခ) တိုးရင်းပေါင်း မည်မျှနည်း။

(က) $I = \dfrac{P\times n\times r}{100}$

$P = \dfrac{100\times I}{n\times r} = \dfrac{100\times 77\times 2}{4\times 7} = 550$ ကျပ်

(ခ) တိုးရင်းပေါင်း = ငွေရင်း + အတိုး

= 550 + 77 = 627 ကျပ်

∴ ငွေရင်း = 550 ကျပ် ၊ တိုးရင်းပေါင်း = 627 ကျပ်

ပုံစံတွက် ၅။ မည်သည့်အချိန်ကာလတွင် ငွေရင်း 2800 ကျပ်ပေါ်တွင် အတိုးနှုန်း 5% ဖြင့် ရိုးရိုး အတိုး 420 ကျပ် ရမည်နည်း။

(က) $I = \dfrac{P\times n\times r}{100}$

$n = \dfrac{100\times I}{P\times r} = \dfrac{100\times 420}{2800\times 5} = 3$

အချိန် = 3 နှစ်

ပုံစံတွက် ၆။ မည်သည့်အချိန်ကာလတွင် ငွေတစ်ရပ်သည် အတိုးနှုန်း $6\frac{1}{4}$% ဖြင့် 2 ဆ ဖြစ်လာမည်နည်း။

ငွေတစ်ရပ် = x ကျပ် ဖြစ်ပါစေ။

တိုးရင်းပေါင်း = x ၏ 2 ဆ = 2x

$$\text{အတိုး} = 2x - x = x$$

$$I = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$n = \frac{100 \times I}{P \times r} = \frac{100 \times x}{x \times \frac{25}{4}} = 16$$

$$\text{အချိန်} = 16 \text{ နှစ်}$$

ပုံစံတွက် ၇။ ငွေရင်း 2500 ကျပ်ပေါ်တွင် $2\frac{1}{4}$ နှစ်အတွက် ရိုးရိုးအတိုးငွေ 225 ကျပ် ရရှိလျှင် အတိုးနှုန်းကို ရှာပါ။

$$I = \frac{P \times n \times r}{100}$$

$$r = \frac{100 \times I}{P \times n} = \frac{100 \times 225}{2500 \times \frac{9}{4}} = 4$$

$$\text{အတိုးနှုန်း} = 4\ \%$$

လေ့ကျင့်ခန်း ၁၃.၁

၁။ အောက်ပါတို့၏ ရိုးရိုးအတိုး နှင့် တိုးရင်းပေါင်းကို ရှာပါ။ (ပုံသေနည်းကို အသုံးပြုပါ။)

(က) ငွေ 999 ကျပ်ကို အတိုးနှုန်း $4\frac{1}{2}\%$ ဖြင့် 4 နှစ်အတွက်

(ခ) ငွေ 2187 ကျပ် 50 ပြားကို အတိုးနှုန်း 4% ဖြင့် 2 နှစ် 3 လအတွက်

(ဂ) ငွေ 5420 ကျပ်ကို အတိုးနှုန်း $2\frac{1}{2}\%$ ဖြင့် 3 နှစ်နှင့် 215 ရက်အတွက်

(တစ်နှစ် = 365 ရက်)

၂။ အောက်ပါတို့၏ ငွေရင်းကို ရှာပါ။

(က) အတိုးနှုန်း 4% ဖြင့် 3 နှစ်တွင် အတိုး 87.60 ကျပ်ရသည်။

(ခ) အတိုးနှုန်း 6% ဖြင့် 3 နှစ် 8 လတွင် အတိုး 143 ကျပ်ရသည်။

(ဂ) အတိုးနှုန်း $3\frac{1}{2}\%$ နှင့် 292 ရက်တွင် အတိုး 108.6 ကျပ်ရသည်။

(တစ်နှစ် = 365 ရက်)

၃။ အောက်ပါတို့မှ အချိန်ကာလကို ရှာပါ။

(က) ငွေ 850 ကျပ်ကို 5% တိုးဖြင့် အတိုး 21.25 ကျပ်ဖြစ်သည်။

(ခ) ငွေ 3060 ကျပ်ကို $3\frac{3}{4}\%$ တိုးဖြင့် တိုးရင်းပေါင်း 3557.25 ကျပ်ဖြစ်သည်။

(ဂ) ငွေ 1363.75 ကျပ်ကို 6% တိုးဖြင့် တိုးရင်းပေါင်း 1561.49 ကျပ်ဖြစ်သည်။

၄။ အောက်ပါတို့တွင် အတိုးနှုန်းကို ရှာပါ။
(က) ငွေရင်း 325 ကျပ်ဖြင့် 4 နှစ်အတွက် အတိုး 3.25 ကျပ် ရသည်။
(ခ) ငွေရင်း 1275 ကျပ်ဖြင့် 2 နှစ် 8 လအတွက် အတိုး 102 ကျပ် ရသည်။
(ဂ) ငွေရင်း 112.5 ကျပ်ဖြင့် 3 နှစ် 8 လအတွက် တိုးရင်းငွေ 137.25 ကျပ်ဖြစ်သည်။

၅။ လူတစ်ယောက်သည် ငွေ 400000 ကျပ်ကို မြန်မာ့စီးပွားရေးဘဏ်၌ အပ်ထား၏။ 1 နှစ် 6 လ အကြာတွင် 200000 ကျပ် ထပ်အပ်၏။ ဘဏ်တိုးနှုန်း 8 % ဖြစ်လျှင် နောက်ထပ် 2 နှစ် 6 လ ပြည့်သောအခါ အတိုးငွေ စုစုပေါင်း မည်မျှရမည်နည်း။

၆။ မြန်မာ့စီးပွားရေးဘဏ်သည် အတိုးနှုန်း 8 % ပေးသည်။ ငွေ 100000 ကျပ်ကို ဘဏ်၌ အပ်ပြီး 2 နှစ် 3 လ အကြာတွင် ငွေ 400000 ကျပ်ကို ထပ်အပ်၏။ 6 လအကြာတွင် အတိုးငွေ မည်မျှရမည်နည်း။

၇။ ဦးမောင်မောင်သည် ငွေ 120000 ကျပ်ကို 4 % တိုးဖြင့် ချေးယူပြီး 1 နှစ် 6 လအကြာတွင် တိုးရင်းငွေ 100000 ကျပ် ပြန်ဆပ်သော် အကြွေးငွေ မည်မျှကျန်သနည်း။

၈။ တူညီသော အတိုးနှုန်းဖြင့် ငွေ 600000 ကျပ်ကို 2 နှစ် ချေးခြင်းနှင့် ငွေ 150000 ကျပ်ကို 4 နှစ် ချေးခြင်းတို့မှ အတိုးငွေ စုစုပေါင်း 90000 ကျပ်ရရှိသော် အတိုးနှုန်းမည်မျှဖြစ်သနည်း။

၉။ 10 % တိုးဖြင့် မည်သည့်အချိန်ကာလတွင် ငွေတစ်ရပ်သည် 3 ဆ ဖြစ်လာမည်နည်း။

၁၀။ ငွေတစ်ရပ်သည် 5 နှစ်တွင် 2 ဆဖြစ်လာရန် အတိုးနှုန်းသည် မည်မျှဖြစ်သနည်း။

၁၃.၂ နှစ်ထပ်တိုး (Compound Interest)

ငွေရင်းတစ်ရပ်ပေါ်တွင် တစ်နှစ်ကုန်ဆုံးတိုင်း သို့မဟုတ် သတ်မှတ်ထားသောအချိန်ကာလ ကုန်ဆုံးတိုင်း ကျသင့်သော အတိုးငွေကို ငွေရင်းတွင် ပေါင်းထည့်ပြီး ဆက်လက် ချေးငှားသွားခြင်းကို **နှစ်ထပ်တိုး** ဟုခေါ်သည်။

ပုံစံတွက် ၁။ ငွေ 48000 ကျပ်ပေါ်တွင် တစ်နှစ်လျှင် အတိုးနှုန်း 5 % ဖြင့် 3 နှစ်အတွက်
(က) ရိုးရိုးအတိုး (ခ) နှစ်ထပ်တိုးဖြင့် တိုးရင်းပေါင်း (ဂ) နှစ်ထပ်တိုး ငွေမည်မျှဖြစ်သနည်း။

(က) 5% တိုး

ငွေ 100 ကျပ်ပေါ်တွင် 1 နှစ်လျှင် အတိုး = 5 ကျပ်

ထို့ကြောင့် 48000 ကျပ်ပေါ်တွင် 3 နှစ်လျှင် အတိုး= $5 \times \frac{48000}{100} \times \frac{3}{1}$

$= 7200$ ကျပ်

$\therefore$ 3 နှစ် အတွက် ရိုးရိုးအတိုး = 7200 ကျပ်

(ခ) အတိုးနှုန်း = $5\ \% = \frac{5}{100} = 0.05$

ပထမနှစ်ငွေရင်း = 48000 ကျပ်

ပထမနှစ်အတိုး = 2400 ကျပ် (48000×0.05)

ပထမနှစ်အတွက်

တိုးရင်း = 50400 ကျပ် သို့မဟုတ်

ဒုတိယနှစ်ငွေရင်း = 50400 ကျပ်

ဒုတိယနှစ်အတိုး = 2520 ကျပ် (50400×0.05)

ဒုတိယနှစ်အတွက်

တိုးရင်း = 52920 ကျပ် သို့မဟုတ်

တတိယနှစ်ငွေရင်း = 52920 ကျပ်

တတိယနှစ်အတိုး = 2646 ကျပ် (52920×0.05)

3 နှစ်အတွက်

တိုးရင်းပေါင်း = 55566 ကျပ်

(ဂ) 3 နှစ်အတွက် တိုးရင်းပေါင်း = 55566 ကျပ်

မူလငွေရင်း = 48000 ကျပ်

3 နှစ်အတွက် နှစ်ထပ်တိုးငွေ = 7566 ကျပ်

(က) ရိုးရိုးအတိုး = 7200 ကျပ်

(ခ) တိုးရင်းပေါင်း = 55566 ကျပ်

(ဂ) နှစ်ထပ်တိုးငွေ = 7566 ကျပ်

ပုံစံတွက် ၂။ ငွေ 102500 ကျပ်ပေါ်တွင် တစ်နှစ်လျှင် နှစ်ထပ်တိုး 3 % ဖြင့် $2\frac{1}{2}$ နှစ် အတွက် တိုးရင်းပေါင်းကို ရှာပါ။

အတိုးနှုန်း = $3\ \% = \frac{3}{100} = 0.03$

ပထမနှစ်ငွေရင်း = 102500 ကျပ်

ပထမနှစ်အတိုး = 3075 ကျပ် (102500×0.03)

ဒုတိယနှစ်ငွေရင်း = 105575 ကျပ်

ဒုတိယနှစ်အတိုး = 3167.25 ကျပ် (105575×0.03)

တတိယနှစ်ငွေရင်း = 108742.25 ကျပ်

$\frac{1}{2}$ နှစ်အတွက်အတိုး = 1631.13 ကျပ် $(108742.25 \times 0.03 \times \frac{1}{2})$

ထို့ကြောင့် $2\frac{1}{2}$ နှစ်အတွက်

တိုးရင်းပေါင်း = 110373.38 ကျပ်

ရှင်းလင်းချက်

(၁) မြန်မာ့ငွေကြေးတွင် ပြားအထိ အမှန်တွက်ရမည်ဖြစ်၍ ကျပ်၏ ဒသမနှစ်နေရာထိ အမှန်ရှာရမည်။

(၂) 2 နှစ်အတွက် တိုးရင်းပေါင်း ရှာပြီးနောက် နှစ်ဝက်အတွက် အတိုးရှာရန်ရှိရာ 2 နှစ်အတွက် တိုးရင်းပေါင်းသည် တတိယနှစ်အတွက် ငွေရင်းဖြစ်၍ ၎င်းကို 0.03 ဖြင့် မြှောက်လျှင် တတိယနှစ်အတိုးရရှိသည်။ သို့ရာတွင် နှစ်ဝက်အတွက် အတိုးလို၍ တတိယနှစ်အတိုးကို $\frac{1}{2}$ ဖြင့် မြှောက်လျှင် နှစ်ဝက်အတိုးရရှိသည်။

ထို့အတူ $\frac{1}{4}$ နှစ်အတွက် လိုလျှင် တတိယနှစ်အတိုးကို $\frac{1}{4}$ ဖြင့် မြှောက်၍ ရှာပြီး $\frac{3}{4}$ နှစ် အတွက် ရှာလိုလျှင် $\frac{3}{4}$ ဖြင့် တတိယနှစ်အတိုးကို မြှောက်၍ ရှာနိုင်သည်။

၁၃.၂.၁ ပုံသေနည်းထုတ်ခြင်း

ငွေ 63000 ကျပ်ပေါ်တွင် နှစ်ထပ်တိုး 5 % ဖြင့် လိုအပ်သည့်နှစ်များအတွက် တိုးရင်းပေါင်း အသီးသီးကို အောက်ပါအတိုင်း တွက်ပြနိုင်သည်။

1 နှစ်အတွက် တိုးရင်းပေါင်း $= 63000 + (63000 \times \frac{5}{100})$

$= 63000 + (63000 \times 0.05)$

$= 63000\,(1 + 0.05)$

$= 63000 \times 1.05$

ထို့အတူ

2 နှစ်အတွက် တိုးရင်းပေါင်း $= 63000 \times 1.05 + 63000 \times 1.05 \times 0.05$

$= 63000 \times 1.05\,(1 + 0.05)$

$= 63000 \times (1.05)^2$

ထို့အတူ

3 နှစ်အတွက် တိုးရင်းပေါင်း $= 63000 \times (1.05)^3$

အထက်ပါတွက်နည်းမှ ယေဘုယျတိုးရင်းပေါင်း ပုံသေနည်းကို ထုတ်ယူနိုင်သည်။

၎င်းမှာ

တိုးရင်းပေါင်း $A = P(1+\frac{r}{100})^n$ ဖြစ်သည်။ ဤတွင်

ငွေရင်း $= P$ ကျပ်

အတိုးနှုန်း $= r\,\%$

အချိန် $= n$ နှစ် ဖြစ်သည်။

၁၃.၂.၂ ငွေရင်းရှာခြင်း

ပုံစံတွက် ၁။ နှစ်ထပ်တိုး 4 % ဖြင့် 3 နှစ်တွင် တိုးရင်းပေါင်း 562432.00 ကျပ် ဖြစ်လာလျှင် ငွေရင်းကိုရှာပါ။

$$4\,\% = \frac{4}{100} = 0.04$$

ပထမနည်း

ငွေရင်း 10000 ကျပ် ဖြစ်ပါစေ။

$$4\,\% = \frac{4}{100} = 0.04$$

ပထမနှစ်ငွေရင်း $=$ 10000.00 ကျပ်

ပထမနှစ်အတိုး $=$ 400.00 ကျပ်

ဒုတိယနှစ်ငွေရင်း $=$ 10400.00 ကျပ်

ဒုတိယနှစ်အတိုး $=$ 416.00 ကျပ် (10400×0.04)

တတိယနှစ်ငွေရင်း $=$ 10816.00 ကျပ်

တတိယနှစ်အတိုး $=$ 432.64 ကျပ် (10816×0.04)

3 နှစ်အတွက် တိုးရင်း = 11248.64 ကျပ်

3 နှစ်အတွက် တိုးရင်း 11248.64 ကျပ် ဖြစ်လျှင် ငွေရင်း =10000 ကျပ်

3 နှစ်အတွက် တိုးရင်း 562432 ကျပ် ဖြစ်လျှင် ငွေရင်း = ?

$$= 10000\times\frac{562432}{11248.64} = 500000 \text{ ကျပ်}$$

ဒုတိယနည်း

$A = 562432.00$ ကျပ်

$r\,\% = 4\% \rightarrow r = 4$

$n = 3$ နှစ်

ပုံသေနည်းကို အသုံးပြုပါက

$$A = P(1+\frac{r}{100})^n$$

$$562432 = P(1+\frac{4}{100})^3$$

$$562432 = P(1+\frac{1}{25})^3$$

$$562432 = P(\frac{26}{25})^3$$

$$P(\frac{26}{25})^3 = 562432$$

$$P = 562432 \times \frac{25}{26}\times\frac{25}{26}\times\frac{25}{26}$$

$P = 500000$ ကျပ်

$\therefore$ ငွေရင်း = 500000 ကျပ်

၁၃.၂.၃ အတိုးနှုန်းရှာခြင်း

ပုံစံတွက် ၁။ ငွေရင်း 20000.00 ကျပ်သည် 2 နှစ်တွင် တိုးရင်းပေါင်း 21632 ကျပ် ဖြစ်လာလျှင် နှစ်ထပ်တိုးနှုန်းကိုရှာပါ။

$A = 21632$ ကျပ်

$P = 20000.00$ ကျပ်

$n = 2$ နှစ်

$$A = P(1+\frac{r}{100})^n$$

$$21632 = 20000 \times (1+\frac{r}{100})^2$$

$$\frac{21632}{20000} = (1+\frac{r}{100})^2$$

$$1.0816 = (1+\frac{r}{100})^2$$

$$(1.04)^2 = (1+\frac{r}{100})^2$$

$$1.04 = 1+\frac{r}{100}$$

$$1.04 - 1 = \frac{r}{100}$$

$$0.04 = \frac{r}{100}$$

$$r = 0.04 \times 100 = 4$$

အတိုးနှုန်း $= 4\ \%$

၁၃.၂.၄ အချိန်ကာလရှာခြင်း

ပုံစံတွက် ၁။ ငွေရင်း 60000 ကျပ်သည် နှစ်ထပ်တိုး 5 % ဖြင့် တိုးရင်းပေါင်း 69457.50 ကျပ် ဖြစ်လာလျှင် ကြာသောအချိန်ကိုရှာပါ။

$$5\ \% = \frac{5}{100} = 0.05$$

ပထမနှစ်ငွေရင်း = 60000.00 ကျပ်
ပထမနှစ်အတိုး = 3000.00 ကျပ် (60000×0.05)

ဒုတိယနှစ်ငွေရင်း = 63000.00 ကျပ်
ဒုတိယနှစ်အတိုး = 3150.00 ကျပ် (63000×0.05)

တတိယနှစ်ငွေရင်း = 66150.00 ကျပ်
တတိယနှစ်အတိုး = 3307.50 ကျပ် (66150×0.05)
3 နှစ်အတွက် တိုးရင်း = 69457.50 ကျပ်
အချိန် = 3 နှစ်

ပုံစံတွက် ၂။ ငွေရင်း 180000 ကျပ်အပေါ်၌ နှစ်ထပ်တိုး $3\frac{1}{3}$ % ဖြင့် အတိုး 17005.00 ကျပ် ရလာလျှင် ကြာသောအချိန်ကိုရှာပါ။

လိုအပ်သော တိုးရင်းပေါင်း = 180000 + 17005.00

= 197005.00 ကျပ်

$3\frac{1}{3}$ % တိုး $= \frac{10}{3\times100} = \frac{1}{30}$

ပထမနှစ်ငွေရင်း = 180000.00 ကျပ်

ပထမနှစ်အတိုး = 6000.00 ကျပ် $(180000 \times \frac{1}{30})$

ဒုတိယနှစ်ငွေရင်း = 186000.00 ကျပ်

ဒုတိယနှစ်အတိုး = 6200.00 ကျပ် $(186000 \times \frac{1}{30})$

တတိယနှစ်ငွေရင်း = 192200.00 ကျပ်

ကျန်သောအတိုး = 197005.00 – 192200

= 4805.00 ကျပ်

ငွေ 100 ပေါ်မှာ အတိုး $3\frac{1}{3}$ ကျပ်ရရန် အချိန် 1 နှစ်ကြာ၏။

ငွေ 100 ပေါ်မှာအတိုး 4805 ကျပ်ရရန် အချိန် = ?

$= 1 \times 4805 \times \frac{3}{10}$ နှစ်

ငွေ 192200 ပေါ်မှာ အတိုး 4805 ကျပ်ရရန် အချိန် = ?

$= 1 \times \frac{100}{192200} \times 4805 \times \frac{3}{10}$

$= \frac{3}{4}$ နှစ် = 9 လ

ကြာချိန် = 2 နှစ် + 9 လ = 2 နှစ် 9 လ

ရှင်းလင်းချက်

(၁) လိုအပ်သော တိုးရင်းပေါင်း 197005 ကျပ်သည် 2 နှစ်အတွက် တိုးရင်းပေါင်းနှင့် 3 နှစ်အတွက် တိုးရင်းပေါင်းကြားတွင် ရှိသည်။

(၂) 2 နှစ်အတွက် တိုးရင်းပေါင်း 192200 ကျပ်ရှာပြီးသောအခါ အတိုးငွေ 4805.00 ကျပ် လိုသေးသည်ကို တွေ့ရသည်။

(၃) ၎င်းလိုနေသောအတိုးသည် ဒုတိယနှစ်တိုးရင်း သို့မဟုတ် တတိယနှစ်ငွေရင်းအပေါ်မှာ တိုးရမည်ဖြစ်၍ 192200 ကျပ်ပေါ်မှာ အတိုး 4805.00 ကျပ်ရရန် ကြာမည့်အချိန်ကို $3\frac{1}{3}$ % တိုးနှုန်းဖြင့် ရှာရာ $\frac{3}{4}$ နှစ် ရရှိ၏။

ထို့ကြောင့် လိုအပ်သော အချိန်မှာ $2\frac{3}{4}$ နှစ်ဖြစ်၏။

၁၃.၂.၅ နှစ်ထပ်တိုးနိယာမ

မည်သည့်အရာမျိုးမဆို သတ်မှတ်ထားသော ကာလအပိုင်းအခြားအတွင်း သတ်မှတ်ထားသည့်နှုန်းအတိုင်း အဆက်မပြတ် တိုးတက်သွားခြင်း သို့မဟုတ် ယုတ်လျော့သွားခြင်းရှိသော် ထိုဖြစ်ရပ်သည် နှစ်ထပ်တိုးနိယာမကို လိုက်နာကျင့်သုံးသည်ဟု ဆိုသည်။

ပုံစံတွက် ၁။ မြို့ကြီးတစ်မြို့၏ လူဦးရေမှာ 76524000 ဖြစ်ပြီး နှစ်စဉ် လူဦးရေတိုးနှုန်းမှာ 2.7 % ဖြစ်သည်။ 3 နှစ်ကြာသောအခါ လူဦးရေ မည်မျှ ဖြစ်လာမည်နည်း။ (ဒသမနှစ်နေရာအထိအမှန်ယူမည်။)

တိုးနှုန်း = 2.7 % $= \dfrac{2.7}{100} = 0.027$

ပထမနှစ်လူဦးရေ $= 76524000$

ပထမနှစ်တိုးသောလူဦးရေ $= 2066148 \quad (76524000 \times 0.027)$

ဒုတိယနှစ်လူဦးရေ $= 78590148$

ဒုတိယနှစ်တိုးသောလူဦးရေ $= 2121933.996 \quad (78590148 \times 0.027)$

တတိယနှစ်လူဦးရေ $= 80712081.99 = 80712082$

တတိယနှစ်တိုးသောလူဦးရေ $= 2179226.21 \, (80712082 \times 0.027)$

3 နှစ်ကြာသော်လူဦးရေ $= 82891308.21 = 82891308$ ယောက်

ပုံစံတွက် ၂။ မော်တော်ဆိုင်ကယ်တစ်စီး၏တန်ဖိုးသည် 3750000 ကျပ်ဖြစ်၏။ ပထမနှစ်တွင် ၎င်း၏ တန်ဖိုးသည် 15 % ယုတ်လျော့သွားပြီး ကျန်နှစ်များတွင် 10 % စီ ယုတ်လျော့သွား၏။ 4 နှစ်ကြာသောအခါ မော်တော်ဆိုင်ကယ်၏ တန်ဖိုးသည် မည်မျှ ဖြစ်မည်နည်း။

ပထမယုတ်လျော့နှုန်း $= 15\,\% = \dfrac{15}{100} = 0.15$

ဒုတိယယုတ်လျော့နှုန်း $= 10\,\% = \dfrac{10}{100} = 0.1$

ပထမနှစ်တန်ဖိုး = 3750000 ကျပ်

ပထမနှစ်လျော့ငွေ = 562500 ကျပ် (3750000×0.15)

ဒုတိယနှစ်တန်ဖိုး = 3187500 ကျပ်

ဒုတိယနှစ်လျော့ငွေ = 318750 ကျပ် (3187500×0.1)

တတိယနှစ်တန်ဖိုး = 2868750.00 ကျပ်

တတိယနှစ်လျော့ငွေ = 286875.00 ကျပ် (2868750×0.1)

စတုတ္ထနှစ်တန်ဖိုး = 2581875.00 ကျပ်

စတုတ္ထနှစ်လျော့ငွေ = 258187.50 ကျပ် (2581875×0.1)

4 နှစ်ကြာတန်ဖိုး = 2323687.50 ကျပ်

4 နှစ်ကြာသောအခါ မော်တော်ဆိုင်ကယ်၏ တန်ဖိုး = 2323687.50 ကျပ်

လေ့ကျင့်ခန်း ၁၃.၂

၁။ အောက်ပါပေးထားချက်များတွင် တိုးရင်းပေါင်းကို ရှာပေးပါ။

(က) ငွေရင်း 60000 ကျပ်၊ 1 နှစ်လျှင် နှစ်ထပ်တိုး 5 % ဖြင့် အချိန်ကာလ 3 နှစ် ။

(ခ) ငွေရင်း 150000 ကျပ်၊ 1 နှစ်လျှင် နှစ်ထပ်တိုး $3\frac{1}{2}\,\%$ ဖြင့် အချိန်ကာလ 2 နှစ် ။

၂။ အောက်ပါပေးထားချက်များတွင် နှစ်ထပ်တိုးကို အနီးဆုံးပြားအထိ ရှာပါ။

(က) ငွေရင်း 800000 ကျပ်၊ 1 နှစ်လျှင် $2\frac{1}{2}\,\%$ ဖြင့် အချိန်ကာလ 3 နှစ် ။

(ခ) ငွေရင်း 315000 ကျပ်၊ 1 နှစ်လျှင် 5 % ဖြင့် အချိန်ကာလ $2\frac{1}{2}$ နှစ် ။

၃။ အောက်ပါပေးထားချက်များတွင် ရိုးရိုးအတိုးနှင့် နှစ်ထပ်တိုးတို့၏ ခြားနားခြင်းကို ရှာပါ။

(က) ငွေရင်း 42500 ကျပ်၊ 1 နှစ်လျှင် 4 % ဖြင့် အချိန်ကာလ 3 နှစ် ။

(ခ) ငွေရင်း 765000 ကျပ်၊ 1 နှစ်လျှင် $3\frac{1}{2}\,\%$ ဖြင့် အချိန်ကာလ $2\frac{1}{2}$ နှစ် ။

၄။ အောက်ပါတို့မှ ငွေရင်းကို ရှာပါ။

(က) တိုးရင်းပေါင်း 135200 ကျပ်၊ နှစ်ထပ်တိုး 4 % ဖြင့် အချိန်ကာလ 2 နှစ် ။

(ခ) အတိုး 16230 ကျပ်၊ နှစ်ထပ်တိုး 10 % ဖြင့် အချိန်ကာလ $2\frac{1}{2}$ နှစ် ။

၅။ အောက်ပါတို့မှ နှစ်ထပ်တိုး၏ ရာခိုင်နှုန်းကို ရှာပါ။

(က) ငွေရင်း 100000 ကျပ်၊ တိုးရင်းပေါင်း 106090 ကျပ်၊ အချိန်ကာလ 2 နှစ် ။

(ခ) ငွေရင်း 25000 ကျပ်၊ တိုးရင်းပေါင်း 26010 ကျပ်၊ အချိန်ကာလ 2 နှစ် ။

၆။ အောက်ပါတို့မှ အချိန်ကာလကို ရှာပါ။

(က) ငွေရင်း 62500 ကျပ်၊ တိုးရင်းပေါင်း 67600 ကျပ် နှစ်ထပ်တိုး 4 %။

(ခ) ငွေရင်း 25000 ကျပ်၊ တိုးရင်းပေါင်း 28190 ကျပ် နှစ်ထပ်တိုး 6 %။

၇။ လူတစ်ယောက်သည် တစ်နှစ်တစ်ကြိမ် နှစ်စတွင် ကျပ် 250000 ကို နှစ်ထပ်တိုး 4 % ဖြင့် စုဆောင်းသော် 4 နှစ် အပြီးတွင် ငွေမည်မျှ စုဆောင်းမိမည်နည်း။

၈။ ငွေ 257500 ကျပ်ပေါ်တွင် $2\frac{1}{4}$ % ဖြင့် ပထမနှစ်နှင့် တတိယနှစ်တို့၏ နှစ်ထပ်တိုး ခြားနားခြင်းကို ရှာပါ။

၉။ ငွေတစ်ရပ်ကို အတိုးနှုန်း 5 % ဖြင့် 3 နှစ် အတွက် ရိုးရိုးအတိုးနှင့် နှစ်ထပ်တိုးတို့၏ ခြားနားခြင်းသည် 3812.50 ကျပ် ဖြစ်သော် ငွေရင်းကို ရှာပါ။

၁၀။ လူတစ်ယောက်သည် ဘဏ်မှ ငွေ 500000 ကျပ်ကို နှစ်ထပ်တိုး $4\frac{1}{4}$ % ဖြင့် ချေး၍ တစ်နှစ်ကုန်ဆုံးလျှင်ငွေ 100000 ကျပ် ပြန်ဆပ်၏။ ထိုသူသည် 4 ကြိမ်ငွေဆပ်ပြီးသော် ငွေမည်မျှဆပ်ရန်ကျန်မည်နည်း။

၁၃.၃ အစုရှယ်ယာနှင့်စတော့ (Share and Stock)

၁၃.၃.၁ အစုရှယ်ယာ

ယေဘုယျအားဖြင့် လုပ်ငန်းတစ်ခုအတွက် ငွေကြေးများစွာလိုသောအခါ အစုရှယ်ယာများခေါ်၍ အရင်းတည်ကြသည်။ ဥပမာ ငွေရင်း 60000000 ကျပ်နှင့် လုပ်ငန်းတစ်ခုကို တည်ထောင်နိုင်ရန် ရှယ်ယာပေါင်း 6000 ခွဲဝေ၍ ရှယ်ယာတစ်ခုလျှင် ငွေ 10000 ကျပ် သတ်မှတ်သည်။ ထိုငွေ 10000 ကျပ်သည် ရှယ်ယာတစ်ခု၏ မူလတန်ဖိုးဖြစ်သည်။ သတ်မှတ်ဈေးနှုန်းရှိသည့် အစုရှယ်ယာများ ပိုင်ဆိုင်သူများကို အစုရှယ်ယာရှင်များဟု ခေါ်သည်။ အစုရှယ်ယာရှင်များ ပေါင်းစပ်လုပ်ကိုင်သည့်

စီးပွားရေးအဖွဲ့အစည်းကို ကုမ္ပဏီဟု ခေါ်သည်။ အဆိုပါ အစုရှင်များ ရွေးကောက် တင်မြှောက်သော ဒါရိုက်တာလူကြီးမင်းများသည် ကုမ္ပဏီ၏အမြတ်ကို တစ်နှစ် တစ်ကြိမ်သော် လည်းကောင်း၊ နှစ်ဝက်တစ်ကြိမ်သော်လည်းကောင်း ကာလပိုင်းခြား၍ ဝေပုံကျအမြတ်အဖြစ် ခွဲဝေပေးလေ့ရှိသည်။ ဝေပုံကျအမြတ်ကို ငွေရင်း၏ ရာခိုင်နှုန်းအဖြစ် ဖော်ပြလေ့ရှိသည်။ ဝေပုံကျအမြတ်သည် 6 % ဖြစ်လျှင် ရှယ်ယာတစ်ခု၏ မူလတန်ဖိုးသည် 10000 ကျပ် ဖြစ်သောကြောင့် ရှယ်ယာတစ်ခုပေါ်တွင် ဝေပုံကျအမြတ်သည် $\frac{6}{100} \times 10000$ ကျပ် = 600 ကျပ် ဖြစ်သည်။ တစ်နည်းအားဖြင့် ဝေပုံကျအမြတ် စုစုပေါင်းသည် $\frac{6}{100} \times 60000000$ ကျပ် = 3600000 ကျပ် ဖြစ်သည်။ ထို့ကြောင့် ရှယ်ယာတစ်ခုပေါ်တွင် ဝေပုံကျအမြတ်သည် $\frac{3600000}{6000} = 600$ ကျပ် ဖြစ်သည်။

အစုရှယ်ယာရှင်တစ်ဦးသည် ရှယ်ယာစု ပိုင်သရွေ့ကာလပတ်လုံး ကုမ္ပဏီမှ ဝေပုံကျအမြတ်ကို ရပိုင်ခွင့်ရှိသည်။ ရရှိသော အမြတ်ငွေကို သူ၏ဝင်ငွေဟုခေါ်သည်။ အကယ်၍ မိမိရင်းထားသော ငွေကို ပြန်လည်ရရှိလိုလျှင် ရှယ်ယာများ ကို အခြားသူတစ်ဦးတစ်ယောက်အား ရောင်းချရမည်ဖြစ်သည်။ ဤသို့ ရောင်းရာတွင် ရှယ်ယာ တစ်ခု၏ တန်ဖိုးသည် မူလတန်ဖိုးနှင့် တူချင်မှ တူပေလိမ့်မည်။ အပြင်ဈေး သို့မဟုတ် ပေါက်ဈေး မှာ မူလတန်ဖိုးထက် ပိုချင်ပို၍ လျော့ချင်လျော့နေပေမည်။ ၎င်းသည် ကုမ္ပဏီ၏ ဝေပုံကျအမြတ် 600 ကျပ်သာရမည်။ ၎င်းထက်ပို၍ မရနိုင်ချေ။ ထို့ကြောင့် ဝေပုံကျအမြတ်ကို ရှယ်ယာ၏ မူလတန်ဖိုးပေါ်၌သာ တွက်ချက်ရသည်ကို သတိပြုသင့်၏။ အခြားသတိပြုသင့်သော အချက်တစ်ခုမှာ ရှယ်ယာများကို ပြည့်ပြည့်စုံစုံသာရောင်းဝယ်နိုင်၍ အစိတ်အပိုင်းအဖြစ် ရောင်းဝယ်ခြင်းမပြုလုပ်နိုင်ချေ။

ရှယ်ယာများ၏ လက်ငင်းတန်ဖိုး (ပေါက်ဈေး)သည် မူလတန်ဖိုးထက် ပိုနေသော် ရှယ်ယာများသည် ဈေးတက်သည်ဟုဆိုသည်။ လျော့နေသော် ဈေးကျသည်ဟု ဆိုသည်။ ပေါက်ဈေး သည် မူလတန်ဖိုးနှင့်ညီမျှနေသော် ဈေးမှန်ရှိသည်ဟုဆိုသည်။ ထို့ကြောင့် ငွေ 10000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာတစ်ခု၏ ပေါက်ဈေးသည် 12500 ကျပ် ဖြစ်သော် ရှယ်ယာဈေးသည် 2500 ကျပ် တက်သည်။ ပေါက်ဈေးသည် 9000 ကျပ်ဖြစ်သော် ရှယ်ယာဈေးသည် 1000 ကျပ် လျော့ကျသည်။ ရှယ်ယာဈေးသည် 10000 ကျပ်ဖြစ်သော် ရှယ်ယာဈေးသည် ဈေးမှန်ရှိသည်။

ပုံစံတွက် ၁။ ကုမ္ပဏီတစ်ခု၏ 10000 ကျပ်တန်ရှယ်ယာ 27 ခုကို 12500 ကျပ်ဈေးဖြင့် ဝယ်သော် ငွေမည်မျှ ပေးရမည်နည်း။

ရှယ်ယာ 1 ခု၏ တန်ဖိုး = 12500 ကျပ်

ရှယ်ယာ 27 ခု၏ တန်ဖိုး = 12500 ကျပ် × 27

= 337500 ကျပ်

∴ ပေးရမည့်ငွေ = 337500 ကျပ်

ပုံစံတွက် ၂။ ဝေပုံကျအမြတ် 6 % ပေးသော ကုမ္ပဏီတစ်ခု၏ 20000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာ 175 ခုမှ ရရှိမည့် ဝင်ငွေကို ရှာပါ။

ရှယ်ယာ 1 ခုပေါ်တွင် ရသောအမြတ် $= \frac{6}{100} \times 20000$ ကျပ်

ရှယ်ယာ 175 ခုပေါ်တွင် ရသောအမြတ် $= \frac{6}{100} \times 20000 \times 175$ ကျပ်

= 210000 ကျပ်

အခြားတစ်နည်း

ရှယ်ယာ 175 ခု၏ မူလတန်ဖိုး = 20000 ကျပ် × 175

= 3500000 ကျပ်

မူလတန်ဖိုး 100 ကျပ်ပေါ်တွင်ဝင်ငွေ = 6 ကျပ်

မူလတန်ဖိုး 3500000 ကျပ်ပေါ်တွင်ဝင်ငွေ $= \frac{3500000 \times 6}{100}$

= 210000 ကျပ်

∴ ရှယ်ယာ 175 ခုမှ ရရှိမည့် ဝင်ငွေ = 210000 ကျပ်

ပုံစံတွက် ၃။ 5000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာများသည် 6250 ကျပ် ဈေးပေါက်သော် ငွေ 300000 ကျပ်ဖိုး ဝယ်လျှင် ရှယ်ယာပေါင်း မည်မျှရသနည်း။

ရင်းနှီးငွေ 6250 ကျပ်ဖြင့် ဝယ်နိုင်သော ရှယ်ယာ = 1 ခု

ရင်းနှီးငွေ 300000 ကျပ်ဖြင့် ဝယ်နိုင်သော ရှယ်ယာ $= \frac{1 \times 300000}{6250}$

= 48 ခု

∴ ရှယ်ယာ = 48 ခု

ပုံစံတွက် ၄။ 250 ကျပ် ဈေးတက်နေသော 1000 ကျပ်တန်ရှယ်ယာ 108 ခု၏ လက်ငင်းတန်ဖိုးကို ရှာပါ။

ရှယ်ယာ 1 ခု၏ မူလတန်ဖိုး = 1000 ကျပ်

ရှယ်ယာ 1 ခု၏လက်ငင်းတန်ဖိုး = $1000 + 250$ = 1250 ကျပ်

ရှယ်ယာ 1 ခု၏ လက်ငင်းတန်ဖိုး = 1250 ကျပ်

ရှယ်ယာ 108 ခု၏ လက်ငင်းတန်ဖိုး= 1250×108

= 135000 ကျပ်

$\therefore$ လက်ငင်းတန်ဖိုး = 135000 ကျပ်

ပုံစံတွက် ၅။ လူတစ်ယောက်သည် 5000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာများတွင် ငွေ 500000 ကျပ် ရင်းနှီးပြီးနောက် ရှယ်ယာ၏တန်ဖိုးသည် 7500 ကျပ် ဖြစ်လာသောအခါ ရှယ်ယာများကို ပြန်ရောင်းလိုက်၏။ သူသည် အမြတ်မည်မျှ ရရှိခဲ့သနည်း။

ငွေ 5000 ကျပ်ဖြင့် ဝယ်နိုင်သော ရှယ်ယာ = 1 ခု

ငွေ 500000 ကျပ်ဖြင့် ဝယ်နိုင်သော ရှယ်ယာ = $\frac{500000}{5000}$ = 100 ရှယ်ယာ

ရှယ်ယာ 1 ခုပေါ်တွင် အမြတ်ငွေ = $7500 - 5000$

= 2500 ကျပ်

ရှယ်ယာ 100 ခုပေါ်တွင် အမြတ်ငွေ = 2500×100

= 250000 ကျပ်

$\therefore$ ရရှိသောအမြတ် = 250000 ကျပ်

ပုံစံတွက် ၆။ တစ်နှစ် 5 % အတိုးပေးသော ကုမ္ပဏီတစ်ခု၏ 10000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာသည် 16000 ကျပ် ဈေးဖြစ်နေသောအခါ လူတစ်ယောက်သည် 1024000 ကျပ် ရင်းနှီး၏။

(က) ထိုလူရရှိသော နှစ်စဉ်ဝေပုံကျအမြတ်ကို ရှာပါ။

(ခ) ရင်းနှီးငွေပေါ်တွင် ရရှိသော ငွေရာခိုင်နှုန်းကို ရှာပါ။

ငွေ 16000 ကျပ်ဖြင့် ဝယ်နိုင်သော ရှယ်ယာ = 1 ခု

(က) 1024000 ကျပ်ဖြင့် ဝယ်နိုင်သော ရှယ်ယာ = $\frac{1024000}{16000}$

= 64 ရှယ်ယာ

ရှယ်ယာ 1 ခု၏ မူလတန်ဖိုး = 10000 ကျပ်

ရှယ်ယာ 64 ခု၏ မူလတန်ဖိုး = 640000 ကျပ်

မူလတန်ဖိုး 100 ကျပ်ဝင်ငွေ = 5 ကျပ်

မူလတန်ဖိုး 640000 ကျပ်ဝင်ငွေ = $\dfrac{5\times 640000}{100}$ ကျပ်

= 32000 ကျပ်

(ခ) ရင်းနှီးငွေ 1024000 ကျပ်တွင် ဝင်ငွေ = 32000 ကျပ်

ရင်းနှီးငွေ 100 ကျပ်တွင် ဝင်ငွေ = $\dfrac{32000\times 100}{1024000}$

= $3\dfrac{1}{8}$ ကျပ်

$\therefore$ (က) နှစ်စဉ်အမြတ် = 32000 ကျပ်

(ခ) ဝင်ငွေရာခိုင်နှုန်း = $3\dfrac{1}{8}\%$

ပုံစံတွက် ၇။ ကုမ္ပဏီတစ်ခု၏ 5000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာများကို 6000 ကျပ်ဈေးပေး၍ ဝယ်ယူရာ လူတစ်ယောက်သည် မိမိငွေပေါ်တွင် 4 % ဝင်ငွေရရှိ၏။ ကုမ္ပဏီသည် မည်သည့် ဝေပုံကျအမြတ်ရာခိုင်နှုန်းပေးသနည်း။ သူသည် ရှယ်ယာ 150 ခု ဝယ်ထားသော် ဝင်ငွေမည်မျှ ရသနည်း။

ရင်းနှီးငွေ 100 ကျပ်အပေါ် ရသောဝင်ငွေ = 4 ကျပ်

ရင်းနှီးငွေ 6000 ကျပ်ပေါ်တွင် ရသောဝင်ငွေ = $\dfrac{4\times 6000}{100}$

မူလတန်ဖိုး 5000 ကျပ်ပေါ်တွင်ရသောဝင်ငွေ = $\dfrac{4\times 6000}{100}$ ကျပ်

မူလတန်ဖိုး 100 ကျပ်ပေါ်တွင်ရသောဝင်ငွေ = $\dfrac{4\times 6000}{100}\times\dfrac{100}{5000}$ ကျပ်

= $4\dfrac{4}{5}$ ကျပ်

ဝေပုံကျအမြတ် = $4\dfrac{4}{5}\%$

6000 ကျပ်သည် ရှယ်ယာ 1 ခု၏ လက်ငင်းတန်ဖိုးဖြစ်သည်။

ရှယ်ယာ 1 ခုပေါ်တွင် ရသော ဝင်ငွေ $= \dfrac{4\times 6000}{100}$ ကျပ်

ရှယ်ယာ 150 ခုပေါ်တွင် ရသော ဝင်ငွေ $= \dfrac{4\times 6000}{100}\times 150$ ကျပ်

$= 36000$ ကျပ်

ဝင်ငွေ $= 36000$ ကျပ်

ပုံစံတွက် ၈။ 20000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာများကိုပေါက်ဈေးဖြင့် 450000 ကျပ်ဖိုး ဝယ်ယူရာတွင် လူတစ်ယောက်သည် ဝင်ငွေ 40000 ကျပ် ရရှိ၏။ ရှယ်ယာများသည် ဝေပုံကျအမြတ် 5 % ပေးသော် ရှယ်ယာ 1 ခု ၏ လက်ငင်းတန်ဖိုးကိုရှာပါ။

မူလတန်ဖိုး 100 ကျပ်ပေါ်တွင်အမြတ် $= 5$ ကျပ်

မူလတန်ဖိုး 20000 ကျပ်ပေါ်တွင်အမြတ် $= \dfrac{5\times 20000}{100}$ ကျပ်

$= 1000$ ကျပ်

ရှယ်ယာအရေအတွက် $= \dfrac{40000}{1000} = 40$ ခု

20000 ကျပ်သည် ရှယ်ယာ 1 ခု၏ မူလတန်ဖိုးဖြစ်သည်။

1000 ကျပ်သည် ရှယ်ယာ 1 ခု၏ ဝင်ငွေဖြစ်သည်။

40000 ကျပ်သည် ရှယ်ယာ 40 ခု၏ ဝင်ငွေဖြစ်သည်။

ရှယ်ယာ 40 ခု အတွက် ရင်းနှီးသောငွေ $= 450000$ ကျပ်

ရှယ်ယာ 1 ခု အတွက် ရင်းနှီးသောငွေ $= \dfrac{450000}{40}$ ကျပ်

$= 11250$ ကျပ်

$\therefore$ လက်ငင်းတန်ဖိုး $= 11250$ ကျပ်

လေ့ကျင့်ခန်း ၁၃.၃

အောက်ပါတို့၏ တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

၁။ ပေါက်ဈေး 13000 ကျပ်ဖြစ်သော 10000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာ 12 ခု။

၂။ ပေါက်ဈေး 7000 ကျပ်ဖြစ်သော 5000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာ 35 ခု။

၃။ ပေါက်ဈေး 7500 ကျပ်ဖြစ်သော 10000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာ 100။

၄။ 2750 ကျပ် ဈေးတက်သော 5000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာ 75 ခု။

အောက်ပါတို့မှ နှစ်စဉ်ဝင်ငွေကို ရှာပါ။

၅။ ဝေပုံကျအမြတ် $3\frac{1}{2}$% ပေးသော 10000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာ 45 ခု။

၆။ ဝေပုံကျအမြတ် 15 % ပေးသော 5000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာ 150 ခု။

၇။ ဝေပုံကျအမြတ် $1\frac{1}{2}$% ပေးသော 5000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာ 325 ခု။

အောက်ပါတို့တွင် ရှယ်ယာမည်မျှ ဝယ်နိုင်သနည်း။

၈။ ရင်းနှီးငွေ 1750000 ကျပ်ဖြင့် 25000 ကျပ်ဈေးရှိသော 10000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာ။

၉။ ရင်းနှီးငွေ 270000 ကျပ်ဖြင့် 4500 ကျပ်ဈေးရှိသော 5000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာ။

၁၀။ ငွေ 1050000 ကျပ်ဈေးဖြင့် 2500 ကျပ် ဈေးကျသော 10000 ကျပ်တန် ရှယ်ယာ။

အောက်ပါတို့တွင် ရင်းနှီးငွေပေါ်၌ အမြတ်ရာခိုင်နှုန်း မည်မျှရရှိသနည်း။

၁၁။ $6\frac{1}{2}$ % ပေးသော 15000 ကျပ်တန်ရှယ်ယာကို ပေါက်ဈေး 7500 ကျပ်ဖြင့် ရင်းနှီးသော်။

၁၂။ $3\frac{1}{5}$ % ပေးသော 10000 ကျပ်တန်ရှယ်ယာကို ပေါက်ဈေး 8750 ကျပ်ဖြင့် ရင်းနှီးသော်။

၁၃.၃.၂ စတော့

ကျွန်ုပ်တို့သည် အစုရှယ်ယာများကို လေ့လာစဉ်က ကုမ္ပဏီတစ်ခုထူထောင်ရာ၌ ငွေရင်းရရှိရန် အစုရှယ်ယာများဖွဲ့၍ ၎င်းတို့ကို ရောင်းချပြီး ငွေကြေးရှာကြံကြောင်းကို ဖော်ပြခဲ့ပြီးဖြစ်၏။ ကုမ္ပဏီငွေရင်းကို တိကျသောအစုရှယ်ယာများ မဖွဲ့စည်းဘဲထားသော် **ငွေရင်းအားလုံးကို "စတော့"** ဟု ခေါ်သည်။ စတော့ကို အရောင်းအဝယ်ပြုလုပ်ရာတွင် စတော့အစိတ်အပိုင်းကို ဝယ်ရောင်းနိုင်သည်။ ဤတွင် ရှယ်ယာနှင့် ကွာခြား၏။ ရှယ်ယာ၏အစိတ်အပိုင်းကို ရောင်းဝယ်ခြင်း မပြုလုပ်နိုင်ချေ။ စတော့၏ပေါက်ဈေးသည် ရှယ်ယာများ၏ဈေးကဲ့သို့ပင် မူလတန်ဖိုးနှင့်မတူဘဲ ပြောင်းလဲတတ်သည်။ ရှယ်ယာတွင် ပေါက်ဈေးကို ဖော်ပြသောအခါ ရှယ်ယာတစ်ခု၏ ပေါက်ဈေးကို ဖော်ပြသည်။ စတော့မှာမူ စတော့ ကျပ် 100 အတွက် ဈေးကို ဖော်ပြလေ့ရှိ၏။

ဥပမာ စတော့တစ်မျိုး၏ ပေါက်ဈေးသည် 105 ကျပ်ဖြစ်သည်ဟုဆိုရာတွင် စတော့ငွေရင်း ကျပ် 100 ၏ ပေါက်ဈေးသည် 105 ကျပ်ဖြစ်သည်ဟု ဆိုလိုသည်။ ထို့ကြောင့် "စတော့ တစ်မျိုးသည် 108 ဈေးရှိသည်" ဟုဖော်ပြလျှင် ထိုစတော့ငွေရင်း ကျပ် 100 ၏ ပေါက်ဈေးသည် လက်ငင်းငွေ 108 ကျပ် ဖြစ်သည်။ ဤတွင် စတော့ငွေရင်း ကျပ် 100 သည် လက်ငင်းငွေ ကျပ် 100 နှင့်မတူချေ။ စတော့ငွေရင်း ကျပ် 100 သည် ကုမ္ပဏီငွေရင်း အစိတ်အပိုင်း ဖြစ်သည်။ အထက်ပါဖော်ပြချက်တွင် လက်ငင်းငွေ 108 ကျပ်သည် မူလငွေရင်း၏အစိတ်အပိုင်း ကျပ် 100 အတွက်ပေးရသော ငွေဖြစ်သည်။ ကုမ္ပဏီစတော့ အစိတ်အပိုင်းကို ပိုင်ဆိုင်သူသည် ဝေပုံကျအမြတ်ကို ခံစားနိုင်ခွင့်ရှိသည်။ စတော့တွင် အတိုး သို့မဟုတ် ဝေပုံကျ အမြတ်ကို ရာခိုင်နှုန်း မည်ရွေ့မည်မျှပေးမည်ဟု မူလကတည်းက သတ်မှတ်ထားလေ့ရှိသည်။ "စတော့တစ်မျိုးသည် ဝေပုံကျအမြတ် 3% ပေးသည်" ဟုဆိုသော် စတော့ငွေရင်း ကျပ် 100 ပိုင်သူသည် တစ်နှစ်လျှင် ငွေ 3 ကျပ် အတိုး ရပိုင်ခွင့်ရှိသည်။ ထိုအတိုးကို လက်ငင်းတန်ဖိုးပေါ် တွင် တွက်ယူပေးလေ့မရှိချေ။ စတော့တစ်မျိုးနှင့်တစ်မျိုးခွဲခြားဖော်ပြရာ၌ အတိုးနှုန်းကိုသာ အမည်တပ်၍ ဖော်ပြလေ့ရှိ၏။ ဥပမာ 3 % စတော့၊ 5 % စတော့ စသည်တို့ဖြစ်သည်။

ပုံစံတွက် ၁။ ငွေ 123 ကျပ်ဈေးဖြင့် စတော့ငွေရင်း ကျပ် 82500 ကျပ်၏ တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

စတော့ငွေရင်း ကျပ် 100 ၏ လက်ငင်းတန်ဖိုး = 123 ကျပ်

စတော့ငွေရင်း ကျပ် 82500 ၏ လက်ငင်းတန်ဖိုး $= \dfrac{123\times 82500}{100}$

= 101475 ကျပ်

လက်ငင်းတန်ဖိုး = 101475 ကျပ်

ပုံစံတွက် ၂။ ငွေ 93 ကျပ်ဈေးနှင့် 27900 ကျပ်ဖိုး စတော့ မည်မျှ ဝယ်နိုင်သနည်း။

လက်ငင်း 93 ကျပ်ဖြင့် စတော့ငွေရင်းကျပ် 100 ဝယ်နိုင်၏။

လက်ငင်း 27900 ကျပ်ဖြင့် စတော့ငွေရင်းကျပ် $= \dfrac{100\times 27900}{93}$

= 30000

စတော့ = 30000 ကျပ်

ပုံစံတွက် ၃။ 3 % အမြတ်ပေးသော စတော့ငွေရင်း 875000 ကျပ်မှ နှစ်စဉ်ဝင်ငွေ မည်မျှ ရမည်နည်း။

စတော့ ကျပ် 100 မှ ရရှိသော ဝင်ငွေ $= 3$ ကျပ်

စတော့ 875000 ကျပ် မှ ရရှိသော ဝင်ငွေ $= \dfrac{3 \times 875000}{100}$ ကျပ်

$= 26250$ ကျပ်

နှစ်စဉ်ဝင်ငွေ $= 26250$ ကျပ်

ပုံစံတွက် ၄။ 116 ကျပ်ဈေးပေါက်သော 5 % စတော့တွင် ငွေ 580000 ကျပ်ကို ရင်းနှီးသော် နှစ်စဉ်ရရှိသော ဝင်ငွေ မည်မျှဖြစ်သနည်း။
(ငွေ 116 ကျပ် ရင်းနှီးသော် စတော့ငွေရင်းကျပ် 100 ပိုင်၏။ စတော့ငွေရင်းကျပ် 100 ပိုင်သော် ဝင်ငွေ 5 ကျပ် ရသည်။)

ငွေ 116 ကျပ် ရင်းနှီးသော် ဝင်ငွေ 5 ကျပ် ရ၏။

ငွေ 580000 ကျပ် ရင်းနှီးသော် ဝင်ငွေ $\dfrac{5 \times 580000}{116} = 25000$ ကျပ်

နှစ်စဉ်ဝင်ငွေ $= 25000$ ကျပ်

ပုံစံတွက် ၅။ 96 ကျပ်ဈေးပေါက်သော 3 % စတော့မှ ဝင်ငွေ 150000 ကျပ် ရလျှင်
(က) စတော့မည်မျှပိုင်သနည်း။ (ခ) မည်မျှရင်းနှီးရမည်နည်း။

(က) ဝင်ငွေ 3 ကျပ်ပေးသော စတော့ငွေရင်း $= 100$ ကျပ်

ဝင်ငွေ 150000 ကျပ် စတော့ငွေရင်း $= \dfrac{100 \times 150000}{3}$

$= 5000000$

စတော့ $= 5000000$ ကျပ်

(ခ) ဝင်ငွေ 3 ကျပ် ရရန် ရင်းနှီးငွေ $= 96$ ကျပ်

ဝင်ငွေ 150000 ကျပ် ရင်းနှီးငွေ $= \dfrac{96 \times 150000}{3}$

$= 4800000$ ကျပ်

ရင်းနှီးငွေ $= 4800000$ ကျပ်

ပုံစံတွက် ၆။ 120 ကျပ် ဈေးရှိသော 4 % စတော့မှ မိမိရင်းနှီးငွေပေါ်တွင် အမြတ်ရာခိုင်နှုန်း မည်မျှရှိသနည်း။

ရင်းနှီးငွေ 120 ကျပ်ပေါ်တွင် ရရှိသော အမြတ်ငွေ = 4 ကျပ်

ရင်းနှီးငွေ 100 ကျပ်ပေါ်တွင် ရရှိသော အမြတ်ငွေ = $\dfrac{4 \times 100}{120}$ ကျပ်

= $3\dfrac{1}{3}$ ကျပ်

အမြတ်ရာခိုင်နှုန်း = $3\dfrac{1}{8}$ %

ပုံစံတွက် ၇။ 60 ကျပ်ဈေးဖြင့် 3% စတော့နှင့် 93.75 ကျပ်ဈေးဖြင့် 4.5 % စတော့တွင် မည်သည့် စတော့သည် ဝင်ငွေပိုကောင်းသနည်း။

ရင်းနှီးငွေ 60 ကျပ်ပေါ်တွင် ရရှိသော ဝင်ငွေ = 3 ကျပ်

ရင်းနှီးငွေ 100 ကျပ်ပေါ်တွင် ရရှိသော ဝင်ငွေ = $\dfrac{3 \times 100}{60}$ ကျပ်

= 5.00 ကျပ်

ရင်းနှီးငွေ 93.75 ကျပ်ပေါ်တွင် ရရှိသောဝင်ငွေ = 4.5 ကျပ်

ရင်းနှီးငွေ 100 ကျပ်ပေါ်တွင် ရရှိသော ဝင်ငွေ = $\dfrac{4.5 \times 100}{93.75}$ ကျပ်

= 4.80 ကျပ်

60 ကျပ်ဈေးဖြင့် 3% စတော့ငွေရင်းသည် ဝင်ငွေပိုသည်။

လေ့ကျင့်ခန်း ၁၃.၄

၁။ အောက်ပါတို့၏ စတော့တန်ဖိုးကို ရှာပါ။

(က) ငွေ 87 ကျပ်ဈေးဖြင့် စတော့ 80000 ကျပ်။

(ခ) ငွေ 92 ကျပ်ဈေးဖြင့် စတော့ 132000 ကျပ်။

၂။ ငွေ 80 ကျပ် ဈေးဖြင့် 100000 ကျပ်ဖိုးဝယ်သော် စတော့မည်မျှ ရရှိမည်နည်း။

၃။ အောက်ပါတို့မှ နှစ်စဉ်ဝင်ငွေ မည်မျှရရှိမည်နည်း။

(က) 3 % ပေးသော စတော့ငွေရင်း 340000 ကျပ်။

(ခ) 5 % ပေးသော စတော့ငွေရင်း 145000 ကျပ်။

၄။ အောက်ပါတို့မှ နှစ်စဉ်ဝင်ငွေ မည်မျှရရှိမည်နည်း။

(က) 4 % စတော့ငွေရင်းတွင် 128 ကျပ်ဈေးဖြင့် ငွေ 150000 ကျပ် ရင်းနှီးသော်။

(ခ) $4\frac{1}{2}$% စတော့ငွေရင်းတွင် 126 ကျပ်ဈေးဖြင့် ငွေ 840000 ကျပ် ရင်းနှီးသော်။

၅။ အောက်ပါတို့မှ ရင်းနှီးငွေပေါ်တွင် အမြတ်ရာခိုင်နှုန်း မည်မျှရသနည်း။ (ဒသမ 1 နေရာအထိ အမှန်ပေးပါ။)

(က) 75 ကျပ်ဈေးရှိသော 40 % စတော့ငွေရင်း။

(ခ) 106 ကျပ်ဈေးရှိသော 6 % စတော့ငွေရင်း။

(ဂ) 101.25 ကျပ်ဈေးရှိသော 5 % စတော့ငွေရင်း။

၆။ အောက်ပါတို့တွင် မည်သည်က ဝင်ငွေပိုကောင်းသနည်း။

(က) ငွေ 51 ကျပ်ဈေးဖြင့် $2\frac{1}{2}$ % စတော့ငွေရင်းနှင့် 102 ကျပ်ဈေးဖြင့် $5\frac{1}{2}$ %စတော့ငွေရင်း။

(ခ) ငွေ 104.50 ကျပ်ဈေးဖြင့် 6 % စတော့ငွေရင်းနှင့် 99 ကျပ်ဈေးဖြင့် 5 % စတော့ငွေရင်း။